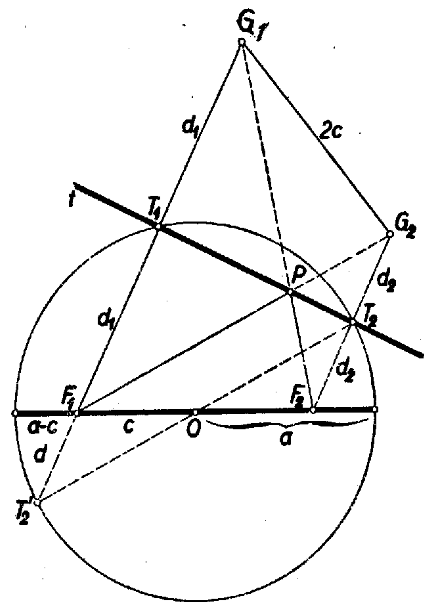
I. megoldás: Legyen az ellipszis nagytengelye $2a$, kistengelye $2b$, a fókuszok távolsága $2c$, tetszőleges érintője t, és ezen az érintési pont P. Ismeretes, hogy a fókuszokból az érintőkre bocsátott merőlegesek talppontjai T_1 és T_2 a főkörön vannak (lásd az ábrát).



Legyen $F_1T_1 = d_1$, $F_2T_2 = d_2$. Bizonyítandó, hogy

$$d_1d_2 = b^2 = a^2 - c^2.$$

Jelöljük F_1 és F_2 tükörképeit t-re nézve G_1, illetőleg G_2-vel, akkor az $F_1G_1G_2F_2$ egyenlő szárú trapézban a párhuzamos oldalak $2d_1$ és $2d_2$, a szárak $2c$, a P pontban egymást metsző átlók $F_1G_2 = F_2G_1 = 2a$, mert

$$F_1G_2 = F_1P + PG_2 = F_1P + PF_2.$$

Ptolemaios tétele szerint húrnégyszögben a szemközt fekvő oldalak szorzatainak összege egyenlő az átlók szorzatával, tehát jelen esetben

$$4d_1d_2 + 4c^2 = 4a^2,$$

amiből

$$d_1d_2 = a^2 - c^2 = b^2.$$

A feladatkitűző megoldása

II. megoldás: Ha T_2-nek centrális tükörképét O-ra nézve T_2'-vel jelöljük, akkor $OF_1T_2'\triangle \cong OF_2T_2\triangle$, miatt T_2' rajta van a T_1F_1 egyenesen, és $F_1T_2' = d_2$ (lásd az ábrát).

A körre vonatkozó arányos távolságok ismert tétele szerint az F_1 ponton átmenő két húron levő szeletekre

$$d_1d_2 = (a-c)(a+c) = a^2 - c^2 = b^2.$$

Gerentsér Imre (Pécs, Bányaip. t. IV. o. t.)