I. megoldás: Először határozzuk meg az egyenes és az ellipszis metszéspontjait, majd írjuk fel annak feltételét, hogy a két metszéspont egybeesik. Ez egyben az egyenes és az ellipszis érintkezésének feltétele.

Az egyenes és ellipszis metszéspontjának koordinátái az (1), (2) egyenletrendszer megoldásai. Helyettesítsük az (1)-ből kifejezett y-t a (2)-be, ekkor a

$$b^2x^2 + a^2(p^2x^2 + 2pqx + q^2) = a^2b^2$$

egyenletre jutunk, vagy x hatványai szerint rendezve

$$(a^2p^2 + b^2)x^2 + 2a^2pqx + a^2(q^2 - b^2) = 0. \tag{3}$$

A két metszéspont egybeesésének szükséges feltétele, hogy (3) diszkriminánsa

$$D = 4a^4p^2q^2 - 4(a^2p^2 + b^2)a^2(q^2 - b^2) = 0 \tag{4}$$

legyen. Ez elégséges feltétel is, mert egybeeső x értékekhez egybeeső y értékek tartoznak az (1) egyenlet szerint.

Egyszerűsítés után (4) a következő alakra hozható

$$D = a^2p^2 + b^2 - q^2 = 0. \tag{4'}$$

Ezzel feleltünk a feladat első kérdésére.

Az érintési pont abszcisszáját a (3) egyenletből nyerjük, figyelembe véve, hogy $D = 0$, és így (4′)-ből $a^2p^2 + b^2 = q^2$

$$x_{1,2} = \frac{-2a^2pq}{2(a^2p^2 + b^2)} = -\frac{a^2pq}{q^2} = -\frac{a^2p}{q}.$$

Továbbá (1)-ből az érintési pont ordinátája (4′) figyelembevételével

$$y_{1,2} = px_{1,2} + q = \frac{-a^2p^2 + q^2}{q} = \frac{b^2}{q}.$$

Csiszár Imre (Bp., I., Petőfi g. IV. o. t.)

II. megoldás: Felírjuk az ellipszis tetszőleges $P(x_1,\, y_1)$ pontjában az érintő egyenletét, majd megvizsgáljuk annak feltételét, hogy (1) az érintővel egybeeső egyenesnek legyen az egyenlete.

A $P(x_1,\, y_1)$ pontbeli érintő egyenlete

$$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2, \text{ ahonnan } y = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x + \frac{b^2}{y_1}.$$

Ezt (1)-gyel tagonként összehasonlítva, nyerjük

$$p = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}, \qquad q = \frac{b^2}{y_1}.$$

Innen az érintési pont koordinátái:

$$x_1 = -\frac{a^2p}{q} \qquad y_1 = \frac{b^2}{q}.$$

Ezzel feleltünk a feladat második kérdésére.

Az $(x_1,\, y_1)$ pont az ellipszis tetszőleges pontja. E szerint koordinátái kielégítik az ellipszis egyenletét:

$$b^2\frac{a^4p^2}{q^2} + a^2\frac{b^4}{q^2} = a^2b^2,$$

ahonnan egyszerűsítés és rendezés után ugyanarra az

$$a^2p^2 + b^2 - q^2 = 0,$$

összefüggésre jutunk, mint az I. megoldásban.

Dormány Mihály (Kecskemét, Katona J. g. III. o. t.)