I. megoldás: A beírt és körülírt kör sugarát ϱ, ill. r-rel jelölve, bizonyítandó, hogy

$$r \geq 2\varrho.$$

Tételünk közvetlenül következik Berkes Jenő „A talpponti háromszögről” c. cikkében bizonyított (IV) összefüggésből. Eszerint

$$\frac{k}{K}=\frac{\varrho}{r}, \tag{1}$$

ahol K az adott háromszög, k a talpponti háromszög kerületét jelenti. (Lásd K. M. L. 1956. márciusi számában a 63. old.)

Ismeretes, hogy k a beírt háromszögek minimális kerülete, és mint ilyen nem lehet nagyobb az oldalfelező pontok által meghatározott $\frac{K}{2}$ kerületű háromszögnél. Tehát $k \leq \frac{K}{2}$, és így (1)-ből

$$\frac{\frac{K}{2}}{K}=\frac{1}{2} \geq \frac{\varrho}{r},$$

vagyis

$$r \geq 2\varrho.$$

Az egyenlőség jele nyilván csak akkor érvényes, ha a talpponti háromszög egybeesik az oldalfelező pontok alkotta háromszöggel, vagyis szabályos háromszög esetén.

Jakubovics János (Bp., V., Eötvös J. g. IV. o. t.)

II. megoldás: Még egyszerűbben következik tételünk az ismeretes Euler-féle tételből, mely szerint

$$2r\varrho=r^2-d^2,$$

ahol d jelenti a beírt és körülírt kör középpontjainak egymástól való távolságát. (Lásd „Matematikai Versenytételek” I. rész 1897/2 feladathoz fűzött 2. jegyzetet a 41–43. old.)

Mivel

$$d \geq 0, \text{ azért } 2r\varrho \leq r^2,$$

vagyis

$$2\varrho \leq r.$$

Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $d=0$, vagyis a háromszög szabályos.

Forgó Gábor és Imre (Bp., V., Eötvös J. g. IV. o. t.)

III. megoldás: Ismeretes a tankönyvből, hogy a talpponti háromszög köré írt ún. Feuerbach-féle kör átmegy az oldalfelező pontokon is, és sugara $\frac{r}{2}$. Tehát a Feuerbach-féle, $\frac{r}{2}$ sugarú kör minden oldalt két pontban metsz (esetleg érint, ha a két pont egybeesik). Ha tehát a körhöz a háromszög oldalaival párhuzamos érintőket szerkesztünk, olyan háromszöghöz jutunk, amely az adott háromszöget teljes egészében tartalmazza, és amelynek beírt köre $\frac{r}{2}$ sugarú. Ebből következik, hogy az adott háromszögbe írt kör sugara nem lehet nagyobb, mint $\frac{r}{2}$, vagyis

$$\varrho \leq \frac{r}{2}.$$

Az egyenlőség jele csak akkor lehet érvényes, ha a Feuerbach-féle kör egybeesik a beírt körrel, vagyis ha a háromszög szabályos.

Megjegyzés: A tételt általánosíthatjuk a térben tetraéderre. A 4 tetraéderlap 4 súlypontja egy, az eredeti tetraéderhez hasonló, $1:3$ arányban kicsinyített tetraédert határoz meg. E tetraéder köré írt gömb sugara tehát $\frac{r}{3}$. Az eredeti tetraéder lapokkal párhuzamos érintősíkokat fektetve e gömbhöz, teljesen a síkbeli okoskodáshoz hasonló meggondolásokkal belátható, hogy $\varrho \leq \frac{r}{3}$. Egyenlőség csak a szabályos tetraéderre áll fenn.

Zsombok Zoltán (Bp., IV., Könyves Kálmán g. IV. o. t.)