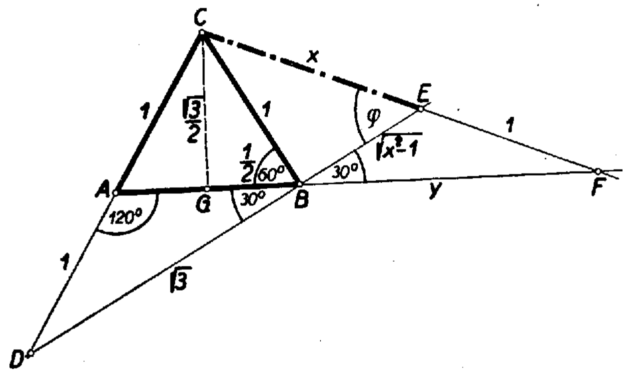
I. megoldás: Az ABD egyenlőszárú háromszögben az A csúcsnál levő szög 120° (lásd az ábrát), és így az $ABD\sphericalangle = EBF\sphericalangle = 30^\circ$ és a $CBE\sphericalangle = 90^\circ$.



A CBE derékszögű háromszögben a $CEB\sphericalangle$-et φ-vel jelölve,

(1) $$x = \frac{1}{\sin\varphi}.$$

A BEF háromszögben a sinus-tétel szerint

$$1 : y = \sin 30^\circ : \sin(180 - \varphi) = \frac{1}{2} : \sin\varphi,$$

ahonnan

(2) $$y = 2\sin\varphi.$$

(1) és (2) szorzata

(3) $$xy = 2.$$

Az $ABC\triangle$-ben a C-ből kiinduló magasság $CG = \frac{\sqrt{3}}{2}$. A CGF derékszögű háromszögre Pythagoras tételét alkalmazva:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = (x+1)^2.$$

A zárójeleket felbontva, összevonva, x^2-tel szorozva – x^2 (3) miatt nem lehet 0 – alkalmazva (3)-at és 0-ra redukálva

(4) $$y^4 + y^3 - 4y - 4 = 0.$$

A baloldalon az első két tagból is, a második kettőből is kiemelhető $(y+1)$

$$(y+1)(y^3 - 4) = 0.$$

Ezen egyenletnek egyetlen pozitív gyöke

$$y = \sqrt[3]{4}, \quad \text{és így (3) alapján } x = \frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{8}{4}} = \sqrt[3]{2}.$$

Danassy Károly (Mosonmagyaróvár, Kossuth g. II. o. t.)

II. megoldás: A CBD derékszögű háromszögben $BD = \sqrt{DC^2 - CB^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$, a CBE derékszögű háromszögből pedig $BE = \sqrt{x^2 - 1}$.

A $CAF\triangle$-re és DE egyenesre felírva a Menelaos-féle tételt

$$(CAD)(AFB)(FCE) = (-2)\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{x} = -1,$$

vagyis

(5) $$xy = 2.$$

Ugyanígy a $CDE\triangle$-re és az AF egyenesre vonatkozóan Menelaos tétele szerint

$$(CDA)(DEB)(ECF) = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \left(-\frac{1}{x+1}\right) = -1,$$

vagyis

$$(x+1)\sqrt{x^2-1} = \sqrt{3}.$$

Négyzetre emélés és rendezés után

$$x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0,$$

ami tényezőkre bontva

$$(x+2)(x^3-2) = 0.$$

Ennek az egyenletnek egyetlen pozitív gyöke

$$x = \sqrt[3]{2} \text{ és így (5) alapján } y = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{8}{2}} = \sqrt[3]{4}$$

Argay Gyula (Balassagyarmat, Balassa g. II. o. t.)

Megjegyzés: Ismeretes a deloszi probléma, amely egy olyan kocka élének megszerkesztését kívánja, amelynek köbtartalma kétszerese egy adott kocka köbtartalmának. Az adott kocka élét egységnek tekintve az $x^3 = 2 \cdot 1^3 = 2$ egyenletből $x = \sqrt[3]{2}$, amely érték tudvalevőleg körzővel és vonalzóval meg nem szerkeszthető. A jelen feladat alapján módot találunk a $\sqrt[3]{2}$ távolság megszerkesztésére, abban az esetben, ha szerkesztési eszközként a közönséges egyélű vonalzó helyett megengedjük az ún. „távolsághordó-vonalzót”, vagyis egy olyan vonalzót, amelyen az egységnyi szakasz fel van tüntetve.

A szerkesztés menete (ábránkat felhasználva): Egy B csúcsú $120°$-os szög egyik szárára felmérjük B-től a $BC = 1$ szakaszt. B-n át húzunk CB-re merőleges egyenest, amely tehát a $120°$-os szög másik szárával $30°$-ot zár be. A távolsághordó vonalzónkat úgy helyezzük el (C körül forgatva és csúsztatva – papírcsíkkal mindenki megpróbálhatja), hogy C-hez illeszkedjék, és ugyanakkor egy egységnyi szakasz két végpontja E és F a $30°$-os szög száraira kerüljön. Ebben a helyzetben – mint bebizonyítottuk – $CE = x = \sqrt[3]{2}$. (Ez is szerkesztés, de nem euklideszi.)