Írjunk minden számlálóba k ($k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$) helyébe $(k+1)-1$-et, és rendezzük a tagokat következőképpen:

$$s_n = \left(\frac{2}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{3}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \frac{n+1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right) - \\ - \left(\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right).$$

Az első zárójeles összeg egyszerűsítés után így alakítható:

$$\frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{4-3}{3\cdot 4} + \frac{5-4}{4\cdot 5} + \ldots + \\ + \frac{(n+3)-(n+2)}{(n+2)(n+3)} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{n}{n+3}\right) = \\ = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} = \frac{n}{3(n+3)}.$$

A második összeget is átalakíthatjuk:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{4-3}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{3-2}{2\cdot 3\cdot 4}\right) + \left(\frac{5-4}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{4-3}{3\cdot 4\cdot 5}\right) + \ldots + \right. \\ \left. + \left(\frac{(n+3)-(n+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{(n+2)-(n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)\right] = \\ = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}\right] = \\ = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}\right] = \frac{n^2+5n}{12(n+2)(n+3)}.$$

Tehát

$$s_n = \frac{n}{3(n+3)} - \frac{n^2+5n}{12(n+2)(n+3)} = \frac{4n(n+2)-(n^2+5n)}{12(n+2)(n+3)} = \\ = \frac{3n^2+3n}{12(n+2)(n+3)} = \frac{n(n+1)}{4(n+2)(n+3)}.$$

Beke Gyula (Hatvan, Bajza g. IV. o. t.)

Megjegyzés: Az

$$s_n = \frac{n(n+1)}{4(n+2)(n+3)}$$

képlet $n = 1$ esetén helyes $\left(s_1 = \frac{1}{24}\right)$, általános érvényessége teljes indukcióval könnyen bizonyítható.