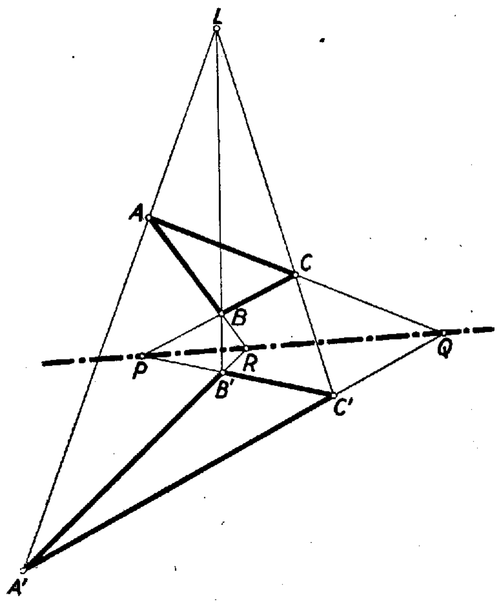
Legyen a BC és $B'C'$ metszéspontja P, a CA és $C'A'$ metszéspontja Q, és az AB és $A'B'$ metszéspontja R (lásd az ábrát).



Írjuk fel a Menelaos-féle tételt az ABL háromszögre, és az $A'B'$ egyenesre:

(1)
$$(ABR)(BLB')(LAA') = -1.$$

Hasonlóképpen nyerjük a BCL háromszögre és $B'C'$-re, ill. a CAL háromszögre és $C'A'$-re, hogy

(2)
$$(BCP)(CLC')(LBB') = -1,$$

és

(3)
$$(CAQ)(ALA')(LCC') = -1.$$

Mivel
$$(BLB')(LBB') = \frac{BB'}{B'L} \cdot \frac{LB'}{B'B} = 1,$$
és hasonlóképpen
$$(LAA')(ALA') = 1, \qquad (CLC')(LCC') = 1,$$
azért (1), (2) és (3) szorzata
$$(ABR)(ACP)(CAQ) = -1,$$
ami – az ABC háromszögre a Menelaos tételének megfordítását alkalmazva – éppen azt fejezi ki, hogy a P, Q, R pontok egy egyenesen vannak.

Fordítva, ha az ABC és $A'B'C'$ háromszögek megfelelő oldalainak metszéspontjai, a P, Q, R pontok egy egyenesen vannak, akkor az $AA'R$ és $CC'P$ háromszögek olyanok, hogy a megfelelő csúcspontok összekötései: AC, $A'C'$ és RP egy ponton, a Q ponton mennek át, de akkor a most bebizonyított tétel alapján az előbbi két háromszög megfelelő oldalainak metszéspontjai: L, B', B egy egyenesen vannak, vagyis a BB' egyenes átmegy az AA' és CC' egyenesek L metszéspontján. Tehát az ABC és $A'B'C'$ háromszögekre nézve a megfelelő pontok összekötései egy ponton, a L ponton mennek át.

Bánhidy Kálmán (Debrecen, Ref. gimn. IV. o. t.)

Megjegyzés: Ezzel tételünknek, amely Desargues tételeként ismeretes (lásd Obláth Richárd cikkét Vályi Gyuláról lapunk 1956 januári számában a 3. oldalon), egy síkbeli bizonyítását adtuk. Az említett cikkben a tétel térbeli bizonyítása található. (Ennek megemlítését természetesen nem fogadtuk el jelen feladat megoldásának.)