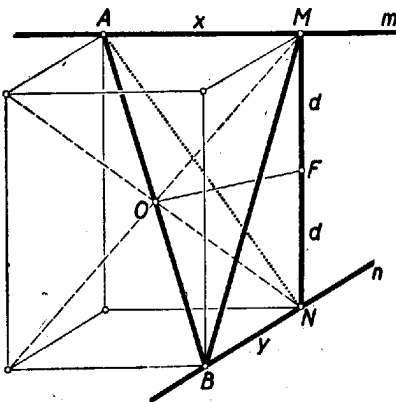


Egészítsük ki az  $MABN$  tetraédert hasábbá, mint az az ábrán látható.



Mivel a feltételek szerint  $MN \perp MA$ ,  $MN \perp NB$  és  $MA \perp NB$ , azért a hasáb téglatest, köréje gömb írható, amely megegyezik az  $MABN$  tetraéder köré írt gömbsel, hiszen négy különböző pont, amelyek nincsenek egy síkban, egy és csakis egy gömböt határoznak meg. A keresett gömb középpontja tehát a téglatest testátlóinak közös felezőpontja. Az egyik átló  $AB$ . Pythagoras tételének kétszeres felhasználásával

$$AB = \sqrt{x^2 + (2d)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 4d^2}.$$

A keresett gömb középpontja tehát az  $AB$  szakasz  $O$  felezőpontja és sugara

$$OA = OM = ON = OB = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2 + 4d^2}.$$

Mivel  $OM = ON$ , azért az  $O$  pont benne van az  $MN$  szakaszt merőlegesen felező síkban, amely a  $MN$  szakaszt az  $F$  felezőpontjában metszi.

a) Ha a gömb sugara állandóan  $2d$ , vagyis

$$AO = OM = 2d,$$

akkor az  $OFM$  derékszögű háromszögben

$$OF = \sqrt{OM^2 - MF^2} = \sqrt{4d^2 - d^2} = d\sqrt{3},$$

vagyis az  $O$  pontok rajta vannak egy olyan körön, amelynek síkja merőlegesen felezi a  $MN$  szakaszt, középpontja az  $F$  pont, és sugara  $d\sqrt{3}$ , s mivel megfordítva e kör minden pontja lehet egy megfelelő gömb középpontja, azért a fenti kör az  $O$  pontok mértani helye.

b) Ha  $x = y$ , akkor az  $O$  pontok távolsága az  $[AMN]$  síktól  $\left(\frac{y}{2}\right)$  ugyanakkora, mint a  $[BMN]$  síktól  $\left(\frac{x}{2}\right)$ , vagyis az  $O$  pontok benne vannak e két sík szögfelező síkjaiban. Az előbbieket alapján tehát az  $O$  pontok rajta vannak a  $MN$  szakaszt merőlegesen felező sík és e két szögfelező sík metszésvonalán. Ez a két metszésvonal egyúttal az  $O$  pontok mértani helye, mert ezen egyenesek bármely pontja lehet  $O$  pont.

*Megjegyzés:* Mindkét mértani hely könnyen általánosítható arra az esetre, a) mikor a gömb sugara  $r =$  állandó ( $> d$ ) és b), amikor  $x = ky$ , ahol  $k$  állandó.

Harza Tibor (Székesfehérvár, József A. g. IV. o. t.)