I. megoldás: A két 5-nél nagyobb prímszám nem lehet x és y, mert ekkor $x^2+y^2=4k+2$ alakú volna, ilyen alakú négyzetszám azonban nincs, mert ha egy négyzetszám páros, akkor az páros szám négyzete, és mint ilyen 4-gyel osztható.

Az egyik prímszám tehát z, a másik legyen y. Be kell bizonyítani, hogy x osztható $3\cdot 4\cdot 5=60$-nal. Mivel 3, 4, 5 egymáshoz relatív prím számok, azért elég megmutatni, hogy x osztható 3-mal, 4-gyel és 5-tel.

z és y, mivel 5-nél nagyobb prím számok, csak $3k\pm 1$ alakúak lehetnek. Ekkor azonban $x^2=z^2-y^2\ 3K$ alakú, tehát x^2, és így x is osztható 3-mal.

Ugyanígy z és y csak $8m\pm 1$ vagy $8m\pm 3$ alakúak lehetnek. Minden esetben $x^2=z^2-y^2=8M$ alakú, ami csak úgy lehetséges, ha x osztható 4-gyel.

z^2 és y^2 5-tel osztva vagy ± 1-et vagy ± 2-t ad maradékul. Ha y $5r\pm 1$, z pedig $5r\pm 2$ alakú volna, vagy fordítva, akkor $x^2=z^2-y^2\ 5R\pm 2$ alakú lenne. Azonban $5r$ alakú számok négyzete $5R$ alakú, $5r\pm 1$ alakúaké $5R+1$, $5r\pm 2$ alakúaké pedig $5R-1$ alakú; tehát $5R\pm 2$ alakú négyzetszám nincs. Ebből következik, hogy z és y vagy mindkettő $5r\pm 1$, vagy mindkettő $5r\pm 2$ alakú. Ekkor azonban $x^2=z^2-y^2\ 5R$ alakú, tehát x osztható 5-tel.

Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Csiszár Imre (Bp., I., Petőfi g. IV. o. t.)

II. megoldás: Az (1) egyenletnek eleget tevő pythagoraszi számok a következőképpen írhatók fel (lásd Rademacher–Toeplitz: „Számokról és alakzatokról” c. szakköri füzet – Tankönyvkiadó 1953. – 88. old.):

$$\begin{aligned} x&=2uv\\ y&=u^2-v^2\\ z&=u^2+v^2, \end{aligned}$$

ahol u és v különböző párosságú, egymáshoz relatív prím egészek. x nem lehet törzsszám, mert $2uv$ mindig páros, sőt mivel u és v egyike páros. $2uv=x$ 4-gyel is osztható.

u és v 3-mal való oszthatóság szempontjából $3k$ vagy $3k\pm 1$ alakú. Ha mindkettő $3k\pm 1$ alakú volna, akkor $u^2-v^2=y$ osztható volna 3-mal, ami lehetetlen, mert y prím és 3-nál nagyobb, így tehát u és v egyike $3k$ alakú, amiből következik, hogy x osztható 3-mal.

Ha u és v közül egyik sem $5k$ alakú, akkor csak $5k\pm 1$, ill. $5k\pm 2$ alakúak lehetnek. Ha egyenlő alakúak, akkor $y=u^2-v^2$, ha különböző alakúak, akkor $z=u^2+v^2$ osztható 5-tel, ami ellentmond annak, hogy y és z 5-nél nagyobb prím számok. Tehát u és v közül az egyik 5-tel osztható, és így $x=2uv$ is osztható 5-tel.

Széphalmi Géza (Bp., VIII., Piarista g. II. o. t.)