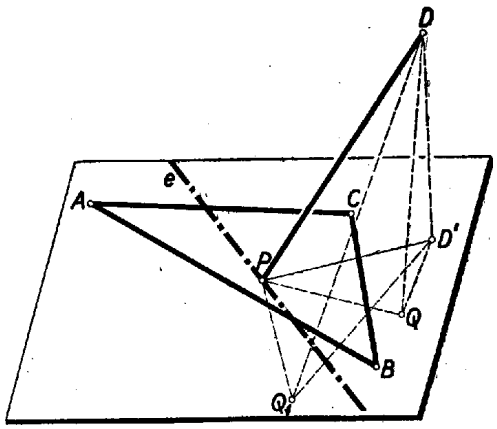
I. megoldás: Legyen D merőleges vetülete: D' a háromszög síkjában a P-től különböző pont. Akkor a PD félegyenes a PD' félegyenessel hegyesszöget zár be. Először megmutatjuk, hogy két P-ből kiinduló síkbeli félegyenes közül az zár be nagyobb szöget a térbeli PD-vel, amelyik PD'-vel nagyobb szöget zár be. Vegyünk fel két P-ből kiinduló tetszőleges félegyenesen egy Q, illetőleg Q_1 pontot úgy, hogy $PQ = PQ_1 = PD'$.



1. ábra

Ha $QPD'\sphericalangle < Q_1PD'\sphericalangle$ (1. ábra), akkor $D'Q < D'Q_1$, és így a QDD' és Q_1DD' derékszögű háromszögekből $QD < Q_1D$, következőleg a QDP és Q_1DP háromszögekből

$$QPD\sphericalangle < Q_1PD\sphericalangle.$$

A P ponton átmenő, DP-re merőleges, sík a háromszög síkjából kimetsz egy DP-re merőleges e egyenest. Minden Q pontra nézve, mely az e egyenesen van a $QPD\sphericalangle = 90°$, tehát az előbbiek alapján minden olyan síkban fekvő Q pontra, amely az e-nek ugyanarra az oldalára esik, mint D',

$$QPD\sphericalangle < 90°,$$

az e másik oldalára eső Q pontokra

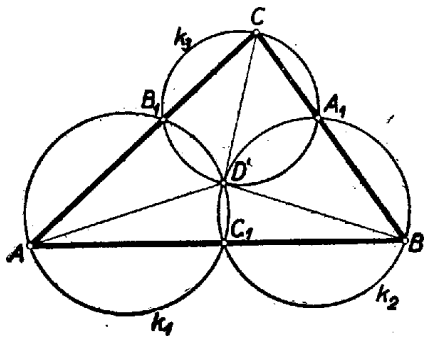
$$QPD\sphericalangle > 90°.$$

Mivel P a háromszögnek egyik belső pontja, azért az e egyenes a háromszögnek legalább egy csúcsát (az 1. ábrában az A-t) elválasztja D'-től és egyszer-smind legalább egy másik csúcstól.

Megjegyzés: Ha $P \equiv D'$, akkor mind a három szög derékszög, tehát akkor feladatunk értelmét veszti.

Daróczy Zoltán (Debrecen, Ref. g. IV. o. t.)

II. megoldás: Tekintsük az AD, BD és CD átmérőjű $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{G}_3$ gömböket. Thales tétele értelmében az $APD\sphericalangle$ tompa-, derék-, illetve hegyesszög, aszerint, amint P a $\mathbf{G}_1$-n belül, a $\mathbf{G}_1$-en rajta, ill. a $\mathbf{G}_1$-en kívül van. Hasonló megállapítások érvényesek a másik két szögre és a másik két gömbre vonatkozólag. Háromszögünk síkja a három gömbből kimetszi rendre a k_1, k_2, k_3 köröket (2. ábra), melyeknek átmérőjük a gömbátmérőknek vetületei: AD', BD', CD'.



2. ábra

A három kör mindegyike tehát átmegy a D' ponton, és 2–2 kör második metszéspontja (A_1, B_1, C_1) a Thales tétele alapján rajta van egy-egy háromszögoldalon (vagy annak meghosszabbításán, ha D' a háromszögön kívül van).

A három kör együtt tehát mindig teljesen lefedi a háromszöget. A háromszög belsejében fekvő minden, D'-től különböző, P pont tehát legalább egy körön belül van, és ugyanakkor legalább egy körön kívül van, de akkor ugyanez áll a P pontra és a körökhöz tartozó gömbökre is. Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

Csiszár Imre (Bp., I., Petőfi g. IV. o. t.)