

I. megoldás: A $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ és $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ ismert összefüggések felhasználásával felírhatjuk a következő azonosságokat:

$$\begin{aligned} 2 \sin 12^\circ \cos 12^\circ &= \sin 24^\circ \\ 2 \sin 24^\circ \cos 24^\circ &= \sin 48^\circ \\ 2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ &= \sin 72^\circ \\ 2 \sin 48^\circ \cos 48^\circ &= \sin 84^\circ \\ 2 \sin 60^\circ \cos 60^\circ &= \sin 60^\circ \\ 2 \sin 72^\circ \cos 72^\circ &= \sin 36^\circ \\ 2 \sin 84^\circ \cos 84^\circ &= \sin 12^\circ \end{aligned}$$

A baloldalakat és a jobboldalakat összeszorozva és mindkét oldalt a jobboldalak szorzatával osztva, nyerjük, hogy

$$2^7 \cos 12^\circ \cdot \cos 24^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \cos 48^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 72^\circ \cdot \cos 84^\circ = 1,$$

ami egyenértékű a bizonyítandó állítással.

Reichmann Róbert (Bp. VIII., Széchenyi g. IV. o. t.)

II. megoldás: Általában bebizonyítjuk, hogy

$$(1) \quad A = \cos x \cos 2x \dots \cos kx = \frac{1}{2^k},$$

ha

$$x = \frac{180^\circ}{2k+1} \cdot (k = 1, 2, \dots)$$

Legyen

$$(2) \quad B = \sin x \sin 2x \dots \sin kx.$$

(1) és (2) szorzata $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ figyelembevételével

$$(3) \quad AB = \frac{1}{2^k} \sin 2x \sin 4x \dots \sin 2kx.$$

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \quad \text{miatt} \\ \sin mx &= \sin [(2k+1) - m]x, \end{aligned}$$

ahol

$$m = 0, 1, 2, \dots, k.$$

(3) tehát így írható:

$$(4) \quad AB = \frac{1}{2^k} \sin(2k-1)x \cdot \sin(2k-3)x \dots \sin 3x \cdot \sin x.$$

(3) és (4) szorzata:

$$\begin{aligned} A^2 B^2 &= \frac{1}{2^{2k}} \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \dots \sin kx \cdot \sin(k+1)x \dots \sin 2kx = \\ &= \frac{1}{2^{2k}} \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \dots \sin kx \cdot \sin kx \sin(k-1)x \dots \sin x = \\ &= \frac{1}{2^{2k}} B^2. \end{aligned}$$

Mivel $B \neq 0$, ezért

$$A^2 = \frac{1}{2^{2k}},$$

és mivel A minden tényezője pozitív, azért

$$A = \frac{1}{2^k},$$

ami bizonyítandó volt.

Feladatunk a most bizonyított általános tételnek speciális esete, amikor $k = 7$.

Zsombok Zoltán (Bp. IV., Könyves Kálmán g. IV. o. t.)