Ismeretes, hogy bármely (a, b, c oldalú α, β, γ szögű) háromszögben

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\varrho}{s-a} \qquad \text{és} \qquad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{\varrho}{s-c},$$

ahol ϱ a beírt kör sugara, és $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

Tehát

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\varrho^2}{(s-a)(s-c)}. \tag{1}$$

Másrészt tudjuk, hogy a háromszög t területére

$$t=\varrho s,$$

ahonnan

$$\varrho^2=\frac{t^2}{s^2}=\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2}=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}.$$

ϱ^2 ezen értékét (1)-be helyettesítve

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{s-b}{s}. \tag{2}$$

A feltétel szerint

$$b=\frac{a+c}{2}, \tag{3}$$

tehát

$$s-b=\frac{a+b+c}{2}-\frac{a+c}{2}=\frac{b}{2}, \qquad s=\frac{a+c}{2}+\frac{b}{2}=\frac{3b}{2}.$$

Ezen értékeket (2)-be helyettesítve

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{3}, \quad \text{ami bizonyítandó volt.} \tag{4}$$

Megjegyzés: (4)-ből (2) felhasználásával ugyanígy visszafelé következtetve (3)-hoz jutunk. Tehát (3) nem csak *elégséges,* hanem *szükséges* feltétele is a (4) alatti összefüggés fennállásának.

Argay Gyula (Balassagyarmat, Balassi B. g. III. o. t.)