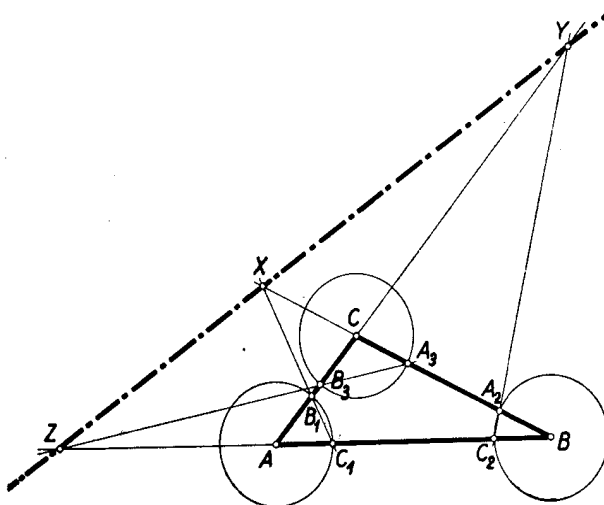


Jelöljük a BC , CA és AB oldalakon keletkező metszéspontokat rendre X , Y , Z -vel (lásd az ábrát).



Feltéve, hogy az ABC egyenessé el nem fajuló háromszögnek minden oldala különböző hosszúságú, az X , Y és Z pontok mindig léteznek. Az ABC háromszög $B_1 C_1$, $A_2 C_2$ és $A_3 B_3$ szelőire rendre felírva a Menelaos-féle tételt:

$$\begin{aligned} (BCX)(CAB_1)(ABC_1) &= -1, \\ (CAY)(ABC_2)(BCA_2) &= -1, \\ (ABZ)(BCA_3)(CAB_3) &= -1. \end{aligned}$$

Mindhárom egyenlőségben a baloldal második és harmadik osztóviszonya az ábrából leolvashatóan kifejezhető a körök közös r sugarával és a háromszög a , b , c oldalával:

$$\begin{aligned} (BCX) \frac{b-r}{r} \cdot \frac{r}{c-r} &= -1, \\ (CAY) \frac{c-r}{r} \cdot \frac{r}{a-r} &= -1, \\ (ABZ) \frac{a-r}{r} \cdot \frac{r}{b-r} &= -1. \end{aligned}$$

E három egyenlőség szorzata

$$(BCX)(CAY)(ABZ) = -1.$$

A Menelaos-tétel megfordítása alapján ez éppen azt jelenti, hogy az X , Y , Z pontok egy egyenesen vannak.

Stahl János (Bp., VI., Kölcsey g. III. o. t.)

Megjegyzések: 1) Könnyű belátni, hogy tételünk akkor is igaz, ha a köröknek a háromszög oldala *meghosszabbításával* való metszéspontjain át húzzuk a szelőket, vagy ha nem kötjük ki, hogy a három kör egymást kizárja.

2) A 3 szelő mindegyike rendre merőleges 1-1 belső szögfelezőre. Ha r minden határon túl közeledik a 0-hoz (vagyis a körök ponttá zsugorodnak), akkor a szelők (a belső szögfelezőkre merőleges) külső szögfelezőkké válnak. Bizonyított tételünk tehát a külső szögfelezőkre vonatkozó megfelelő (és egyszerűen bizonyítható) tételnek általánosítása.