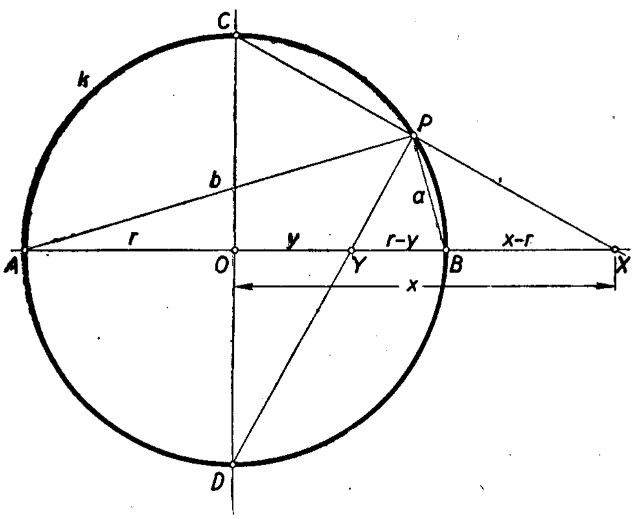
I. megoldás: Legyen P a $\widehat{BC}$ íven. A PD egyenes az ABP háromszög P csúcsához tartozó belső szögfelezője, mert a félkörívhez tartozó (tehát derékszögű) APB kerületi szöget két, egyenként egy-egy negyedkörívhez tartozó (tehát $45^\circ - 45^\circ$-os) szögre bontja (1. ábra).



1. ábra

Mivel PD felezi az APB szöget és Thales tétele értelmében $PD \perp PC$, így PC felezi az $APB\sphericalangle$ mellékszögét, azaz PC az ABP háromszög külső szögfelezője.

Mivel a háromszög bármelyik szögpontjához tartozó belső és külső szögfelező olyan pontokban metszi a szemközti oldalt, amelyeknek az osztóviszonya egyenlő nagyságú, de ellenkező előjelű (Kárteszi: A Menelaos- és Ceva-féle tétel, K. M. L. XI. köt., 3–4. sz. 67. old.), azért

$$(ABY) : (ABX) = \frac{b}{a} : \left(-\frac{b}{a}\right) = -1.$$

Így az A, B; X, Y pontok valóban harmonikus pontnégyest alkotnak.

A pontok mozgásának jellemzése:

Fusson P a $\widehat{BC}$ íven C felé. Ekkor X az AB-nek B-n túli meghosszabbításán fut B-től távolodva, Y pedig BO-n a kör középpontja felé halad.

Ha $P \equiv C$, akkor Y az O-ban van, és a PC egyenes párhuzamos AB-vel, az X metszéspont nem is lép fel, (ABX)-nek nincs értelme.

Ha P továbbhalad a $\widehat{CA}$ íven, akkor az előbbi ábrának a CD átmérőre vonatkozó tükörképét kapjuk. Tükrözéskor az osztóviszony és így a pontnégyes harmonikus volta is változatlanul megmarad. X az AB-nek A-n túli meghosszabbításán közeledik A felé, Y az OA szakaszon közeledik ugyancsak A felé.

Ha $P \equiv A$, akkor $X \equiv A$ és $Y \equiv A$.

Ha P az $\widehat{AD}$ íven D felé halad, akkor az első ábrának az O pontra vonatkozó tükörképét kapjuk. X az A-tól befelé távolodva O felé, Y pedig A-tól kifelé távolodva mozog.

Ha $P \equiv D$, a PD egyenes párhuzamos AB-vel, X az O-ban van, és most az Y metszéspont nem lép fel, vagyis (ABY)-nak nincs értelme.

Ha P a $\widehat{DB}$ íven mozog, akkor az 1. ábra AB-re vonatkozó tükörképét kapjuk. X az O-ból B felé, Y kívülről ugyancsak B felé halad.

Ha P a B-be érkezik, B, X és Y ismét egybeesnek.

Megfigyelhetjük, hogy míg a P pont befutja a teljes kört, addig X is, Y is mindig egy-egy irányban haladva egyszer végigfut az AB egyenesen. X és Y egymáshoz képest mindig ellenkező irányban mozog, és A, ill. B-ben találkoznak. Ha valamelyikük O-ban van, akkor a másik nem lép fel (a „végtelen”-ben van).

Megjegyzés: Ha a k kör sugarát r-rel és az X és Y pontoknak O-tól mért távolságát x és y-nal jelöljük, akkor a $-(ABX) = (ABY)$ így írható:

$$\frac{r+x}{x-r} = \frac{r+y}{r-y}$$

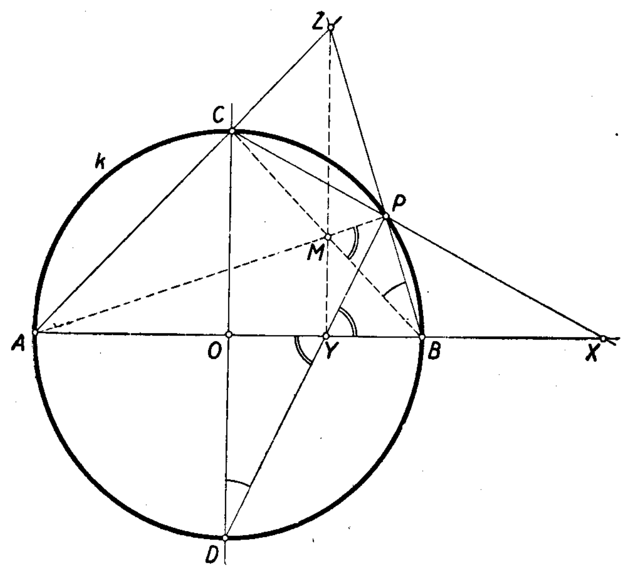
amiből

$$xy = r^2, \qquad \text{vagyis} \qquad \frac{x}{r} = \frac{r}{y}.$$

Ilyenkor azt szoktuk mondani, hogy X az Y pontnak (illetőleg fordítva: Y az X pontnak) *inverze* a k körre vonatkozólag.

Bartha Gyöngyi (Bp., VIII., Apáczai Csere lg. III. o. t.)

II. megoldás: Messe a PB egyenes az AC egyenest a Z pontban (2. ábra).



2. ábra

Az ABZ háromszögben AP és BC magasságvonalak. Így M a háromszög magasságpontja. BPM és DOY háromszögek hasonlóak, mert derékszögűek, és $CBP\sphericalangle = CDP\sphericalangle$ mint a $\widehat{PC}$ ívhez tartozó kerületi szögek. Ezért $PMB\sphericalangle = OYD\sphericalangle = PYB\sphericalangle$, vagyis $BPMY$ húrnégyszög. De akkor $MY \perp AB$, és mivel M a magasságpont, ezért a ZM és YM egyenesek egybeesnek, tehát ZY az $ABZ\Delta$ harmadik magasságvonala.

Az ABZ háromszögre és az M pontra alkalmazva Ceva tételét:

$$(ABY)(BZP)(ZAC) = 1, \tag{1}$$

az ABZ háromszögre és az XPC egyenesre alkalmazva Menelaos tételét:

$$(ABX)(BZP)(ZAC) = -1. \tag{2}$$

(2) és (1) hányadosa:

$$\frac{(ABX)}{(ABY)} = -1.$$

Rázga Tamás (Bp., II., Rákóczi g. IV. o. t.)