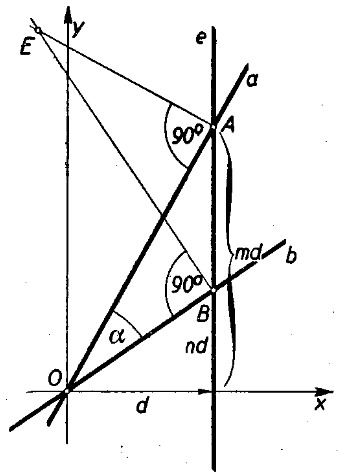
I. megoldás. Jelöljük $\Sigma(a)$ rendszer tengelyeit a-val és b-vel. Válasszuk koordináta–rendszerünk tengelyeit úgy, hogy origója essék egybe a $\Sigma(a)$ rendszer tengelyeinek metszéspontjával, és a rendszer tengelyeit metsző e egyenes legyen merőleges az abszcissza–tengelyre, az origótól $d(\neq 0)$ távolságban. Ebben a koordináta–rendszerben a $\Sigma(a)$ rendszer tengelyeinek egyenlete $y = mx$ és $y = nx$; a tengelyeket metsző egyenes egyenlete $x = d$.

Az e egyenes metszéspontja az a, ill. b egyenessel:

$$A(d,\, md), \qquad\qquad B(d,\, nd).$$

Az e-hez adjungált E pontot úgy nyerjük, hogy megszerkesztjük az A-ban a-ra emelt merőleges és B-ben b-re emelt merőleges metszéspontját (1. ábra).



1. ábra

E merőlegesek egyenlete

$$y - md = -\frac{1}{m}(x - d), \tag{1}$$

$$y - nd = -\frac{1}{n}(x - d). \tag{2}$$

A forgatás során α nem változik. E szög tangense az m és n iránytényezőkkel – mint ismeretes – a következőképpen fejezhető ki

$$\operatorname{tg}\, \alpha = \frac{m - n}{1 + m \cdot n}. \tag{3}$$

(1), (2) és (3) a forgatással keletkező minden E pontra nézve fennáll, tehát ez az egyenletrendszer a keresett mértani hely paraméteres egyenletrendszere. Elvben (1)-ből kifejezhetnénk az m paramétert, (2)-ből az n-et és a két értéket (3)-ba helyettesítve, mindkettőt kiküszöböltük. Azonban így m-re és n-re másodfokú egyenlet adódik. Könnyebben célhoz jutunk, ha alkalmas átalakításokkal arra törekszünk, hogy az mn és $m - n$ értékeket x, y és d-vel kifejezzük.

Ha (1)-ből kivonjuk (2)-t, ismert átalakításokkal

$$mn = \frac{d - x}{d} \tag{4}$$

összefüggésre jutunk. Ha pedig (1)-et osztjuk n-nel, (2)-t m-mel és ezután vonjuk le (2)-t (1)-ből, átalakítások után nyerjük

$$m + n = \frac{y}{d}. \tag{5}$$

(4) és (5)-öt közvetlenül felhasználhatjuk, ha (3)-at – a nevezővel való átszorzás és négyzetreemelés után – így alakítjuk át:

$$(1 + mn)^2 \operatorname{tg}^2\, \alpha = (m - n)^2 = (m + n)^2 - 4mn.$$

(4)-et és (5)-öt behelyettesítve és d^2-tel szorozva

$$(2d - x)^2 \operatorname{tg}^2\, \alpha = y^2 + 4dx - 4d^2.$$

Ez az egyenlet hiperbola egyenlete; könnyen hozható a hiperbola egyenletének ismert alakjára. Az

$$\left(x - 2d\frac{\operatorname{tg}^2\, \alpha + 1}{\operatorname{tg}^2\, \alpha}\right) \operatorname{tg}^2\, \alpha - y^2 = 4d^2 \frac{\operatorname{tg}^2\, \alpha + 1}{\operatorname{tg}^2\, \alpha} \tag{6}$$

alakból, ahol még

$$\frac{\operatorname{tg}^2\alpha+1}{\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha},$$

leolvasható, hogy a hiperbola középpontja a pozitív x tengelyen, az origotól $\frac{2d}{\sin^2\alpha}$ távolságra van; valós tengelyének, amely az x tengelyre esik, fél hossza $a=\frac{2d\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$, fél képzetes tengelye pedig $b=\frac{2d}{\sin\alpha}=a\operatorname{tg}\alpha$. Ezekből a lineáris excentricitásra a középpont abszcisszájával egyenlő érték adódik, tehát a hiperbola egyik fókusza az origó.

Szeidl Béla (Bp. VIII., Apáczai Csere g. III. o. t.)

II. megoldás. Jelölés az I. megoldás szerint. Az a-ra és b-re A, ill. B pontban emelt merőlegesek annak a parabolának érintői, melynek fókusza az O pont, csúcsérintője az e egyenes. Eszerint az E pontokból az említett parabola α, ill. $(180^\circ-\alpha)$ szög alatt látszik.

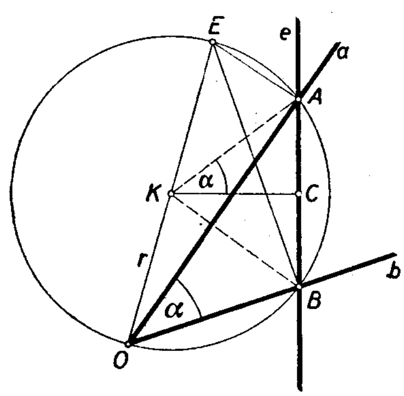
A 617. feladat (K. M. L. X. kötet, 1. szám) megoldásával bebizonyítottuk, hogy azon pontok mértani helye, melyekből egy parabola 45°-os, 135°-os szög alatt látszik, hiperbola. Az ott közölt II. megoldással (1955. januári szám, 25. old.) azonos utat követve, de 45°-os szög helyett általános α szöggel számolva, a mértani hely egyenleteként a

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\sqrt{y^2-2px'}}{2x'+p} \tag{7}$$

egyenletre jutunk, feltéve, hogy a parabola egyenlete $y^2=2px'$. Jelen esetben azonban a parabola egyenlete $y=-4d(x-d)$ és így $p=-2d$, $x'=x-d$. Ha ezen értékeket helyettesítjük (7)-be, akkor megkapjuk a (6) egyenletet.

Csiszár Imre (Bp. I., Petőfi g. III. o. t.)

III. megoldás. Az I. megoldás jelöléseit használva a szerkesztés alapján $OBAE$ húrnégyszög, OE a körülírt kör átmérője (miután A-ból és B-ből derékszög alatt látszik); a körülírt kör középpontja OE felező pontja: K. Rajzoljuk meg az α-hoz tartozó középponti szöget és az $AKB\triangle$ magasságvonalát, mely az e egyenest az AB húr felezőpontjában, C-ben metszi (2. ábra).



2. ábra

A K pont az O ponttól r távolságra van, az e egyenestől mért távolsága (a $CAK\triangle$-ből) $KC=r\cos\alpha$. E két távolság aránya $\frac{1}{\cos\alpha}$ *állandó* és 1-nél nagyobb. Ezért a K pontok mértani helye hiperbola, melynek egyik fókusza O. (L. a III. osztályos gimnáziumi tankönyv 268. oldalát.) Miután pedig az E pontok a K pontokkal O-ra nézve perspektív helyzetben vannak, kétszeres távolságban, az E pontok mértani helye szintén hiperbola. Az O perspektív centrum ezen hiperbolának is fókusza.

Ha $\alpha=90^\circ$, akkor a $KC=r\cos\alpha$ távolság 0-vá válik. Tehát a K pontok mértani helye maga az e egyenes, és így ebben az esetben az E pontok mértani helye az e-vel párhuzamos, O-tól kétszeres távolságban fekvő egyenes. (Ez egyébként kiolvasható az analitikus I. megoldásból is.)

Vigassy György (Bp. I., Petőfi g. IV. o. t.)