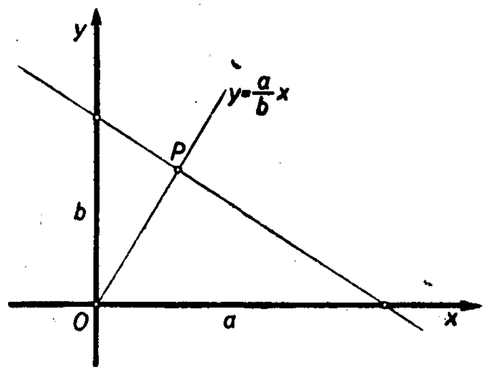
I. megoldás: Számítsuk ki a kezdőpont merőleges vetületének, a P pontnak a koordinátáit. Az

(1) $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

egyenes iránytényezője $-\frac{b}{a}$, tehát az erre merőleges OP egyenes egyenlete

(2) $$y=\frac{a}{b}x.$$



A P pont (1) és (2) metszéspontja; koordinátái

(3) $$x=\frac{ab^2}{a^2+b^2},$$

(4) $$y=\frac{a^2b}{a^2+b^2}.$$

A feladat szerint a-ra és b-re a következő kirovást tesszük:

(5) $$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2},\ \text{ahol } c \text{ konstáns.}$$

(5)-ből

(6) $$c^2=\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

A keresett mértani hely egyenletét úgy nyerjük, hogy a (3), (4) és (5) egyenletekből, amelyek a keresett mértani hely minden pontjára fennállnak, a-t és b-t kiküszöböljük.

(3) és (4) négyzetének összege (6) figyelembevételével

$$x^2+y^2=\frac{a^2b^4+a^4b^2}{(a^2+b^2)^2}=\frac{a^2b^2(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=c^2.$$

Tehát a keresett mértani hely az origo körül

$$c=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

sugárral rajzolt kör.

Perneczky László (Kaposvár, Táncsics g. III. o. t.)

II. megoldás: Számítsuk ki az OP szakasz hosszát. Az a, b befogójú derékszögű háromszög kétszeres területét kétféleképpen kifejezve

$$2t=ab=OP\cdot\sqrt{a^2+b^2},$$

ahonnan

$$OP=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=c\ \text{(konstáns)},$$

ami azt jelenti, hogy a P pontok mértani helye a O középpontú kör, melynek sugara $c=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Janky Béla (Miskolc, Vill. energiaip. t. I. o. t.)

III. megoldás: Essék egybe a koordináta-rendszer egy $\Sigma(90^\circ)$ rendszerrel. A 675. feladatban bebizonyítottuk, hogy az O pont köré írt r sugarú kör érintőihez adjungált pontok mértani helyének egyenlete

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{r^2}\,, \tag{7}$$

és a $\Sigma(90^\circ)$ rendszer értelmezése szerint a pont koordinátái megegyeznek az adjungált egyenes tengelymetszeteivel: $x=a$, $y=b$. Így mindazon egyenesek, melyek tengelymetszetei eleget tesznek az (7) kirovásnak, egy

$$r=\sqrt{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

sugarú kör érintői, és az O-ból az érintőkre bocsátott merőlegesek talppontjai e kör pontjai.

Lőke Mária (Sárvár, Ált. g. IV. o. t)