I. megoldás: Válasszuk $\Sigma(90^\circ)$ rendszerünk tengelyeit egy derékszögű koordinátarendszer tengelyeiül. Az r sugarú kör középpontja az origo, tehát egyenlete $x^2+y^2=r^2$.

Legyenek az érintő egyenes P érintési pontjának koordinátái x_1, y_1. Az érintő egyenlete ekkor $x_1x+y_1y=r^2$.

Ennek az egyenesnek a tengelyekkel való metszéspontjai adják az S pont koordinátáit:

$$x=\frac{r^2}{x_1},\quad y=\frac{r^2}{x_2}.$$

Ebből az érintési pont koordinátái: $x_1=\dfrac{r^2}{x}$, $y_1=\dfrac{r^2}{y}$.

Mivel $(x_1,\, y_1)$ a körön van, azért fennáll az

$$\left(\frac{r^2}{x}\right)^2+\left(\frac{r^2}{y}\right)^2=r^2$$

egyenlet. r^4-nel osztva, nyerjük, hogy az S pontok az

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{r^2}$$

görbén helyezkednek el.

Kérdés még, vajon fordítva, a kapott síkgörbe minden pontjához tartozó adjungált egyenes érintője-e a körnek? A válasz: igen.

Ugyanis a görbe egy tetszőleges $S_0(x_0,\, y_0)$ pontjának adjungált egyenese, az x és y tengelyekből x_0, illetve y_0 részeket metsz le, és így egyenlete

$$\frac{x}{x_0}+\frac{y}{y_0}=1.$$

r^2-tel szorozva, nyerjük az adjungált egyenesre

$$\frac{r^2}{x_0}x+\frac{r^2}{y_0}y=r^2,$$

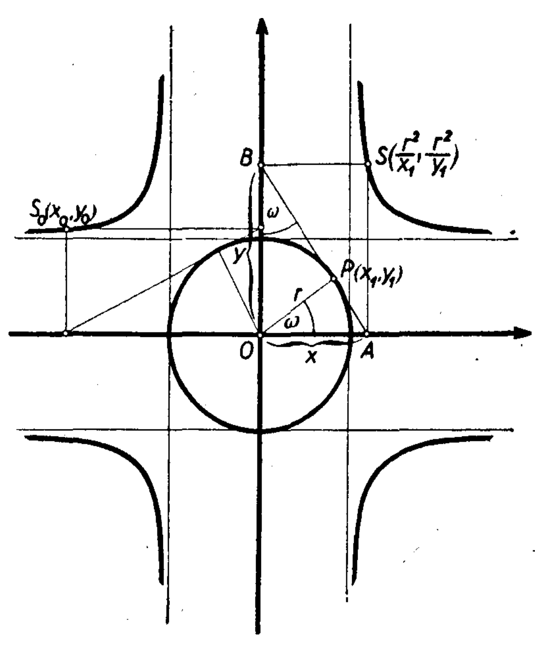
de ez éppen az r sugarú kört az $\left(\dfrac{r^2}{x_0},\, \dfrac{r^2}{y_0}\right)$ pontban érintő egyenes egyenlete, minthogy – a feltétel szerint – $(x_0,\, y_0)$ kielégíti az $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{\gamma^2}$ egyenletet.

A mértani helyként kapott négy egybevágó ágból álló negyedfokú síkgörbe szimmetrikus az origóra (centrálszimmetria), a $-r<x<r$ és $-r<y<r$ síksávokon belül nincs pontja és az

$$x=\pm r,\quad y=\pm r$$

egyenesek az aszimptotái (lásd az ábrát).

Kirz János (Bp. VIII., Apáczai Csere g. IV. o. t.)



II. megoldás: Egy tetszőleges $S(x,\, y)$ pont adjungált egyenese messe a koordinátarendszer tengelyeit az A és B pontokban. $OA = x$, $OB = y$. Az AOB derékszögű háromszög kétszeres területe (lásd az ábrát) egyrészt $AB \cdot PO = r\sqrt{x^2+y^2}$, másrészt $OA \cdot OB = xy$.
Tehát

$$r\sqrt{x^2+y^2} = xy$$

a keresett görbe egyenlete.

Négyzetre emelve és $r^2x^2y^2$-tel osztva (az $x = 0$ és $y = 0$ értékeket kizárva) nyerjük a már ismert

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{\gamma^2}$$

alakot.

Bártfai Pál (Bp. I. Petőfi g. IV. o. t.)

III. megoldás: Ábránkban az $AOP\sphericalangle$-et ω-val jelölve, mint merőleges szárú szög az $OBP\sphericalangle$ is egyenlő ω-val.

Az APO és BPO derékszögű háromszögekből

$$\frac{r}{x} = \cos\omega, \tag{1}$$

$$\frac{r}{y} = \sin\omega. \tag{2}$$

(1) és (2) négyzetét összeadva

$$\frac{r^2}{x^2} + \frac{r^2}{y^2} = \cos^2\omega + \sin^2\omega = 1,$$

vagyis

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{r^2}.$$

Ványai László (Sátoraljaújhely, Kossuth g. III. o. t.)