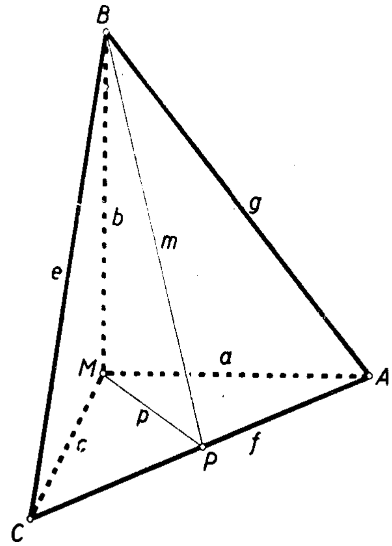
I. megoldás: A betűzést az ábra mutatja.



Jelöljük a gúla MA, MB, MC oldaléleit rendre a, b, c-vel, az alaplap éleit pedig rendre e, f, g-vel. Mivel a gúla mindegyik oldaléle merőleges a másik kettőre, azért mindegyik alapél az egyik oldalélre merőleges síkban fekszik, pl. az f alapél a b oldalélre merőleges $[ac]$ síkban van. Tehát lehet b-n át f-re merőleges síkot fektetni. Messe e sík f-et a P pontban, akkor $MP = p$ és $BP = m$ egyaránt merőleges f-re. Előbbi az AMC derékszögű háromszögnek az AC átfogóhoz tartozó magassága, utóbbi pedig az $ABC\triangle$-ben az AC oldalhoz tartozó magasság.

Az ABC alaplap területének négyzete (alkalmazva a BMP és AMC derékszögű háromszögekre Pythagoras tételét)

$$t^2 = \left(\frac{fm}{2}\right)^2 = \frac{f^2m^2}{4} = \frac{(a^2+c^2)(b^2+p^2)}{4} = \frac{a^2b^2+b^2c^2+f^2p^2}{4}$$

De az $AMC\triangle$ kétszeres területe $fp = ac$, és így

$$t^2 = \frac{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}{4} = \left(\frac{ab}{2}\right)^2 + \left(\frac{bc}{2}\right)^2 + \left(\frac{ac}{2}\right)^2,$$

ami éppen feladatunk állítása.

Janky Béla (Miskolc, Villamosenergiaip. techn. I. o. t.)

Megjegyzés: Ugyanerre az eredményre jutunk, ha az ABC alaplap területét Heron-képlettel fejezzük ki, de a számítás ez esetben bonyolultabb.

II. megoldás: Ismeretes, hogy valamely t területű síkidomnak egy másik síkra való merőleges vetületének területe egyenlő $t\cos\varphi$-vel, ahol φ a két sík hajlásszöge. (Lásd a gimnáziumok IV. osztályos tankönyvében – Tankönyvkiadó 1954 – a 77–79. oldalon, továbbá az ipari és mezőgazdasági technikumok IV. osztályos tankönyvében – Tankönyvkiadó 1955 – a 16–17. oldalon.)

Gúlánknak bármely oldallapja felfogható az alaplapnak merőleges vetületeként. Tehát az oldallapok területét rendre t_1, t_2, t_3-mal jelölve

$$t_1 = t\cos\alpha, \qquad t_2 = t\cos\beta, \qquad t_3 = t\cos\gamma, \tag{1}$$

ahol α, β, γ jelenti a kérdéses oldallapoknak az alaplappal bezárt szögét.

Ha az (1) alatti három egyenletet rendre t_1, t_2, ill. t_3-mal szorozzuk és azután összeadjuk, nyerjük

$$t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = t(t_1\cos\alpha + t_2\cos\beta + t_3\cos\gamma). \tag{2}$$

Vetítsük mind a három oldallapot merőlegesen a gúla alaplapjára, akkor e vetületek összege éppen az alaplap, vagyis

$$t_1\cos\alpha + t_2\cos\beta + t_3\cos\gamma = t.$$

Írjuk ezt (2)-ben a zárójel helyébe, nyerjük, hogy

$$t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = t^2.$$

Székely Tamás (Bp. XVI., Corvin Mátyás g. CV. o. t.)