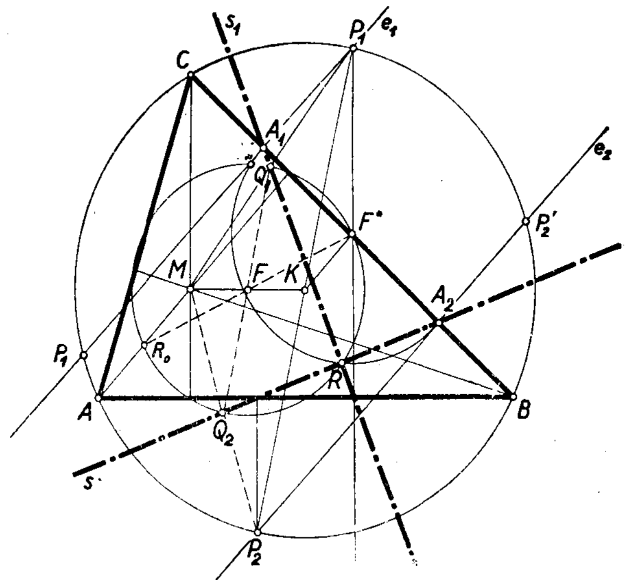
Legyen a magasságpont M, a körülírt kör középpontja K, a Feuerbach-féle kör középpontja F, a körülírt kör változó átmérőjének végpontjai legyenek P_1 és P_2, MP_1 és MP_2 felezőpontjai Q_1, ill. Q_2, a P_1 és P_2 pontokhoz tartozó Simson egyenesek s_1, és s_2 (lásd az ábrát).



Abból az ismeretes tételből, hogy M-nek bármely háromszög oldalra vonatkozó tükörképe a körülírt körön van, következik, hogy a körülírt körnek $1:2$ arányú kicsinyítése az M-ből, mint hasonlósági centrumból, olyan kör, amely átmegy a magasságvonalak talppontjain, vagyis ez a kicsinyített kör a talpponti háromszög köré írt ún. Feuerbach-féle kör.

(1) E tényből következik, hogy Q_1 és Q_2 rajta vannak a Feuerbach-féle körön, és e körnek átellenes pontjai.

(2) Másrészt a 659. feladatban bizonyítottuk, Q_1 és Q_2 rajta van az s_1 ill. s_2 Simson-egyenesen.

A 667. feladatban kimutattuk azt is, hogy s_1 és s_2 szöge egyenlő a $\overset{\frown}{P_1P_2}$ ívhez tartozó kerületi szöggel. Ez utóbbi jelen esetben 90°, tehát $s_1 \perp s_2$, vagyis s_1, és s_2 R metszéspontja a Thales-tétel értelmében és (2) szerint a Q_1Q_2, mint átmérő, fölé írt körön, vagyis (1) szerint a Feuerbach-féle körön van.

A mértani hely fogalma *annak kimutatását is követeli, hogy fordítva* a Feuerbach-féle kör minden pontján át találhatók olyan s_1 és s_2 Simson-egyenesek, amelyekhez tartozó P_1 és P_2 pontok a körülírt kör átellenes pontjai.

E megfordítás igazolásához előbb állapítsuk meg a következőket, Ha F^*-gal jelöljük a BC oldal felezőpontját (amelyen egyébként a Feuerbach-féle kör szintén átmegy, és $F^*K \perp BC$), akkor P_1P_2 átmérő lévén, e pontok A_1A_2 vetületei a BC oldalon éppen a Simson-egyenes értelmezésénél fogva az s_1, ill. s_2-nek pontjai, másrészt $F^*A_1 = F^*A_2$. Mivel $s_1 \perp s_2$ azért Thales-tétele értelmében az F^* körül, mint középpont körül $F^*A_1 - F^*A_2$ sugárral rajzolt kör átmegy az R ponton.

Ennek alapján a Feuerbach-féle kör egy tetszőleges R pontjához a körülírt körön keresett átellenes pontpár így szerkeszthető meg: a BC oldal F^* felezőpontja, mint középpont körül R-en átmenő kört húzunk. Ez messe a BC oldalt A_1 és A_2 pontban. Az A_1 és A_2-ben BC-re állított e_1 és e_2 merőlegesek egymás tükörképei a K középpontra, mert F^*K az A_1A_2 szakasznak is felező merőlegese. Ennek folytán az e_1 és e_2 egyeneseknek a BC egyenes ellenkező oldalára eső P_1, P_2, és P_1', P_2', metszéspont párjai a háromszög köré írt körrel – ha metszik ez egyenesek a kört – átellenes pontpárokat adnak. A hozzájuk tartozó két-két Simson-egyenes átmegy A_1-en, ill. A_2-n, merőleges egymásra, tehát metszéspontjuk az F^* körül rajzolt körön van, ezen kívül, a megoldás első része szerint, rajta van a Feuerbach-féle körön is. Így a két pontpárhoz tartozó Simson-féle egyenes-párok egyike R-ben, másika a két kör másik, R' metszéspontjában metszi egymást. Ki kell még zárni annak lehetőségét, hogy az e_1 és e_2 egyenesek a körülírt körön kívül haladjanak. Az A_1 és A_2 pontok akkor vannak legtávolabb egymástól, ha R a Feuerbach-kör F^*-gal átellenes R_0 pontjába kerül. Ekkor távolsága – és így A_1 és A_2 távolsága is – F^*-tól a Feuerbach-kör átmérőjével, tehát a körülírt kör sugarával egyenlő. Az ennek megfelelő e_1 és e_2 egyenesek érintik a körülírt kört, minden más esetben e két szélső egyenes közt haladnak, tehát metszik a körülírt kört.

Ezzel a feladat állítását teljes egészében bebizonyítottuk.

Bártfai Pál (Bp. I., Petőfi g. IV. o. t.)