I. megoldás: Az összeg így is írható:

$$\begin{aligned} s_n = 5^2(1+6+6^2+\ldots+6^{n-2}+6^{n-1})+ \\ +5^2(6+6^2+\ldots+6^{n-2}+6^{n-1})+ \\ +5^2(6^2+\ldots+6^{n-2}+6^{n-1})+ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +5^2(6^{n-2}+6^{n-1})+ \\ +5^2\cdot 6^{n-1}. \end{aligned}$$

Minden zárójelben egy-egy mértani sor áll.

A k-adik sor így írható egyszerűbben

$$\begin{aligned} s'_k = 5^2(6^{k-1}+6^k+\ldots+6^{n-1}) = 5^2\cdot 6^{k-1}\frac{6^{n-k+1}-1}{6-1} = \\ = 5(6^n-6^{k-1}) = 5\cdot 6^n - 5\cdot 6^{k-1}. \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned} n = s'_1+s'_2+\ldots+s'_k+\ldots+s'_n = (5\cdot 6^n - 5\cdot 6^0 + (5\cdot 6^n - 5\cdot 6)+\ldots+ \\ +(5\cdot 6^n - 5\cdot 6^{n-1}) = n\cdot 5\cdot 6^n - 5(1+6+\ldots+6^{n-1}) = \\ = 5n6^n - 5\frac{6^n-1}{6-1} = 5n6^n - 6^n + 1 = (5n-1)6^n+1. \end{aligned}$$

Rázga Tamás (Bp. II., Rákóczi g. III. o. t.)

II. megoldás: Mindkét oldalt 6-tal szorozva és a jobboldalon 5^2-t kiemelve

$$6s_n = 5^2\big(6+2\cdot 6^2+3\cdot 6^2+\ldots+(n-1)6^{n-1}+n6^n\big).$$

Ebből s_n-t kivonva

$$\begin{aligned} 5s_n = 5^2\big[n6^n - (1+6+6^2+\ldots+6^{n-1})\big] = \\ = 5^2\left[n6^n - \frac{6^n-1}{6-1}\right] = 5^2n6^n - 5\cdot 6^n + 5. \end{aligned}$$

Mindkét oldalt 5-tel osztva

$$s_n = 5n6^n - 6^n + 1 = (5n-1)6^n + 1.$$

Kocsis János (Eger, Dobó István g. III. o. t.)

III. megoldás: Ha már rájutottunk az

$$s_n = (5n-1)6^n + 1 \tag{1}$$

összefüggésre $n=1$, és $n=2$ esetében (amiről egyszerű számítással meggyőződhetünk), akkor teljes indukcióval bebizonyíthatjuk (1) helyességét minden n-re.

Tegyük fel, hogy (1) fennáll $n=k$-ra, tehát

$$s_k = (5k-1)6^k + 1$$

helyes, be fogjuk bizonyítani, hogy ez esetben (1) fennáll $n=(k+1)$-re is. Ugyanis

$$\begin{aligned} s_{k+1} = s_k + (k+1)5^2\cdot 2^k\cdot 3^k = (5k-1)6^k + 1 + 6^k\cdot 5^2(k+1) = \\ = 6^k(5k-1+25k+25)+1 = 6^k(30k+24)+1 = 6^{k+1}(5k+4)+1 = \\ = \big[5(k+1)-1\big]6^{k+1}+1, \end{aligned}$$

ez pedig éppen (1), ha n helyébe $(k+1)$-et helyettesítünk.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy (1) fennáll, ha n bármely természetes szám.

Bognár Péter (Bp. XIII., Villamosenergiaip. techn. IV. o. t.)