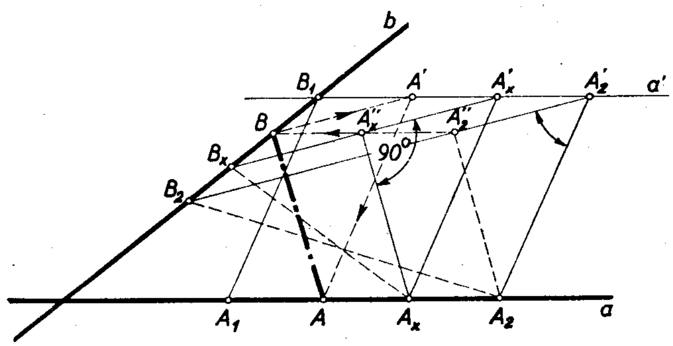
I. megoldás: Feltesszük, hogy a és b nem párhuzamos egyenesek. Toljuk el az a egyenest önmagával párhuzamosan a' helyzetbe, úgy, hogy két megfelelő pont pl. A_1 és B_1 egybeessék (1. ábra).



1. ábra

Legyen A'_x és B_x az a', ill. b egyenes egy egymásnak megfelelő pontpárja, akkor – mivel a mozgás mindkét egyenesen egyenletes – A'_xB_x összekötő egyenes párhuzamos A'_2B_2-vel.

Az $A_xA'_xB_x$ változó háromszögekben az $A_xA'_x$ oldal a párhuzamos eltolás folytán egyenlő és párhuzamos A_1B_1-gyel, továbbá az $A_xA'_xB_x\sphericalangle$ is állandóan megfelelő szöge az $A_2A'_2B_2\sphericalangle$-nek. Az A_xB_x oldal akkor minimális, ha $A_xB_x \equiv AB \perp A'B$, vagyis ha AB párhuzamos az $A_xA'_xB_x\triangle$-ben az A_x csúcsponthoz tartozó $A_xA''_x$ magassággal.

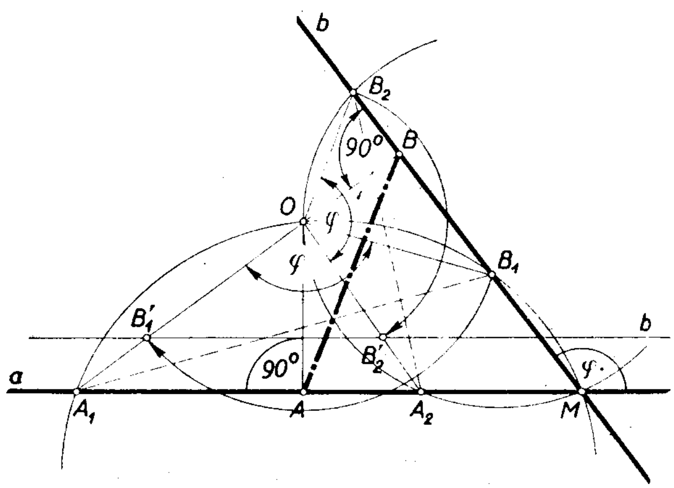
A szerkesztés menete: a tetszőlegesen felvett $A_xA'_xB_x$ háromszögben, tehát pl. az $A_2A'_2B_2\triangle$-ben megszerkesztjük az A_2-ből kiinduló magasság A''_2 talppontját, ezen át a-val húzott párhuzamos egyenes metszi ki a b egyenesből a keresett B pontot. $BA \parallel A''_2A_2$.

Megjegyzés: Ha $a \parallel b$, – és a két pont nem mozog egyenlő sebességgel egy irányban – ez esetben AB akkor minimális, ha AB merőleges a-ra és b-re. Belátható, hogy ez esetben a megfelelő pontpárokat összekötő egyenesek egy ponton mennek keresztül. Ennek igazolása nélkül is bizonyíthatjuk a következő szerkesztés helyességét: az A_1B_1 és A_2B_2 egyenesek M metszéspontjából merőlegest bocsátunk a-ra, ez metszi ki a minimális AB szakaszt. A és B valóban egymásnak megfelelő pontok, mert $B_1B : A_1A = MB : MA = B_1B_2 : A_1A_2$.

Ha a két pont egy irányban mozog egyenlő sebességgel, akkor (az M pont nem létezik) és a két pont távolsága állandó marad.

Gutai László (Bp. IV., Könyves Kálmán g. IV. o. t.)

II. megoldás: Jelöljük a és b metszéspontját M-mel. Szerkesszük meg az A_1, B_1, M és A_2, B_2, M pontokon átmenő köröket (2. ábra).



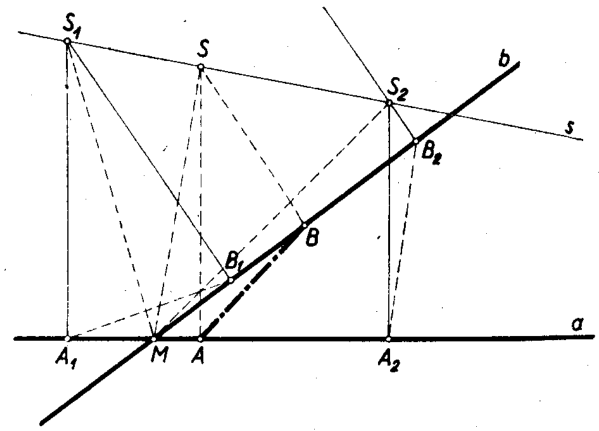
2. ábra

Legyen e két kör metszéspontja O. Ha φ-vel jelöljük az a, b egyenesek által bezárt hegyes- vagy tompaszöget aszerint, hogy O tompa- vagy hegyesszögű tartományban van, akkor a kerületi szögek tétele szerint $A_1OB_1\sphericalangle = \varphi$ és $A_2OB_2\sphericalangle = \varphi$. Forgassuk el a b egyenest O körül φ szöggel úgy, hogy a B_1 és B_2 pontok B'_1 és B'_2 elforgatása az OA_1 ill. OA_2 egyenesekre kerüljenek, akkor $B'_1B'_2 = b' \parallel a$. Az elforgatott B pontokra alkalmazva $\dfrac{OA_1}{OB'_1} = \dfrac{OA_1}{OB_1}$ arányú nyújtást (vagy zsugorítást), az elforgatott B pontsor átmegy az A pontsorba. Ennél a forgatva-nyújtásnál az A_xOB_x

háromszögek mind hasonlóak, mert O-nál a φ szög állandó és e szöget bezáró oldalak aránya egyenlő. Tehát A_xB_x akkor minimális, ha OA_x (és ugyanakkor OB_x) minimális, vagyis $OA_x \equiv OA \perp a$, és $OB_x \equiv OB \perp b$.

Csiszár Imre (Bp. I., Petőfi g. III. o. t.)

III. megoldás: Gönyei Antal »Egy geometriai rokonságról« c. cikkének (K. M. L. 1955. januári szám) 6. pontjában bebizonyítja, hogy ha két egyenesen hasonló pontsorokat veszünk fel, akkor az egymásnak megfelelő pontokban emelt merőlegesek metszéspontjai egy egyenesen sorakoznak. E tételt felhasználva, megszerkesztjük az $S_1S_2 = s$ egyenest (3. ábra).



3. ábra

Thales tétele értelmében az $MA_xS_xB_x$ ill. $MA_xB_xS_x$ négyszögek mind húrnégyszögek, amelyek köré írt kör átmérője MS_x, és az A_xB_x oldalhoz, mint húrhoz, tartozó kerületi szög pedig az a és b egyenesek szöge. Különböző átmérőjű körökben egyenlő kerületi szögekhez tartozó húrok közül a legkisebb átmérőjű körben levő húr a legkisebb, tehát $A_xB_x \equiv AB$ minimális, ha $MS_x \equiv MS \perp s$.

Biczó Géza (Bp. II., Rákóczi g. IV. o. t.)