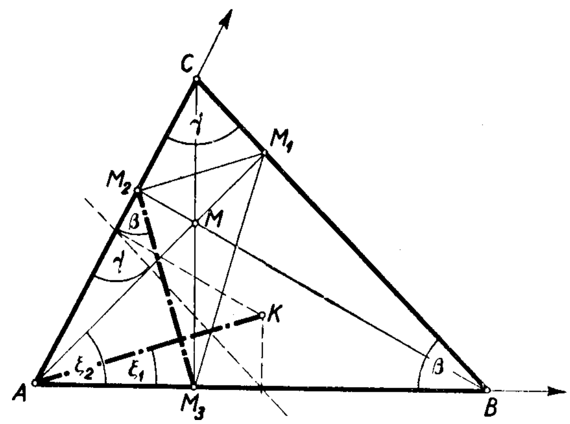
I. megoldás: Legyen az adott háromszög AB és AC oldala egy $\Sigma(\alpha)$ rendszer két tengelye. (A $\Sigma(a)$ rendszertől l. Gönyei A. cikkét a K. M. L. 1955. januári számában). Fel fogjuk írni egyrészt a háromszög köré írt kör K középpontja és adjungáltjára vonatkozó

(1) $$\zeta+\psi=90^\circ$$

összefüggést, majd felírjuk ugyanezt az összefüggést a háromszög M magassági pontjára és ennek adjungáltjára, mely a talpponti háromszög M_2M_3 oldala.

K pont adjungáltja a háromszög BC-vel párhuzamos középvonala, ezért (1) ebben az esetben azt adja, hogy (l. ábra)

(2) $$\zeta_1+\gamma=90^\circ, \quad \text{vagyis} \quad \zeta_1=90^\circ-\gamma.$$



1. ábra

A magassági pontra és adjungáltjára az (1) szögösszefüggés így alakul:

$$\zeta_2+AM_2M_3\sphericalangle=90^\circ,$$

de az AM_1B derékszögű háromszögből $\zeta_2+\beta=90^\circ$, így $AM_2M_3\sphericalangle=\beta$, és következőleg az $AM_2M_3\triangle$,-ből $AM_3M_2\sphericalangle=\gamma$.

Viszont (2) szerint a $KAM\sphericalangle=\zeta_1=90^\circ-\gamma$, ebből következik, hogy

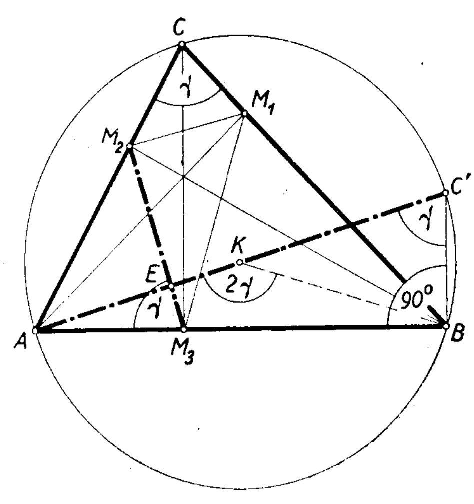
$$AK\perp M_2M_3.$$

Tompaszögű háromszög esetén a bizonyítás ugyanígy elvégezhető. Ha a háromszög derékszögű, akkor a talpponti háromszög az átfogóhoz tartozó magassággá fajul, és így az egyik oldaláról nem tehet beszélni.

Szabó Endre (Gyöngyös, Vak Bottyán g. IV. o. t.)

Természetesen a $\Sigma(a)$ rendszer felhasználása nélkül is könnyen bizonyítható a feladat állítása, amint azt az alábbi megoldások mutatják, melyek mind hegyes-, mind tompaszögű háromszög esetén egyaránt érvényesek.

II. megoldás: A betűzést a 2. ábra mutatja.



2. ábra

Thales tétele értelmében a BC fölé, mint átmérő fölé, rajzolt félkör átmegy az M_2 és M_3 pontokon, tehát BCM_2M_3 húrnégyszög, és így az $M_2M_3A\sphericalangle$, mint külső szög egyenlő a szemközti belső szöggel, vagyis

$$M_2M_3A\sphericalangle=\gamma.$$

Másrészt, ha a körülírt körben A átellenes pontját C'-vel jelöljük, akkor a keletkezett ABC' háromszögben a Thales-tétel alapján az $ABC'\sphericalangle$ derékszög, a kerületi szögek tétele szerint pedig $AC'B\sphericalangle=\gamma$, és így

$$C'AB\sphericalangle=90^\circ-\gamma.$$

AC' és M_2M_3 metszéspontját E-vel jelölve, az AEM_3 háromszög két szögének összege $\gamma+(90^\circ-\gamma)=90^\circ$, és így a harmadik szög

$$AEM_3\sphericalangle=90^\circ,$$

ami bizonyítandó volt.

Szabados József (Bp. III, Árpád g. III. o. t.)

III. megoldás: Az $AKB\sphericalangle$ (2. ábra), mint középponti szög egyenlő 2γ-val, tehát a

$$KAB\sphericalangle\equiv EAM_3\sphericalangle=\frac{180^\circ-2\gamma}{2}=90^\circ-\gamma.$$

Mint ismeretes, a talpponti háromszög oldalai által lemetszett háromszögek hasonlók az eredeti háromszöghöz (a szögek egyenlősége már az I. osztályos tankönyvben megtalálható), vagyis

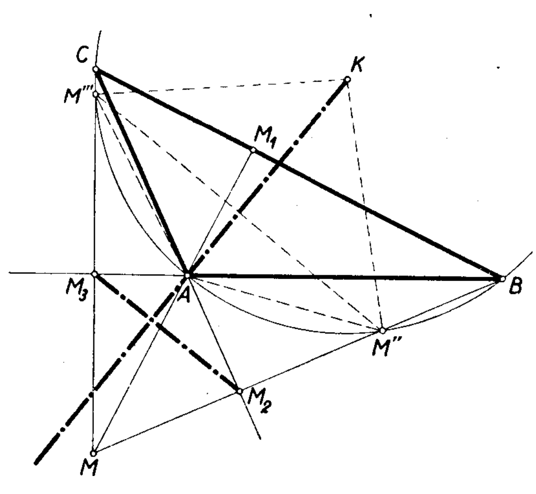
$$AM_3M_2\sphericalangle=\gamma,$$

tehát az $AEM_2\triangle$ harmadik szöge 90°.

Makkai Mihály (Bp. V., Eötvös g. II. o. t.)

IV. megoldás: Ismeretes tétel, hogy az M pont bármely háromszögoldalra vonatkozó tükörképe rajta van a körülírt körön. Tehát M'' és M''' (3. ábra) a körülírt körön van és $M_2M=M_2M''$, $M_3M=M_3M'''$ miatt

(1) $$M''M'''\parallel M_2M_3.$$



3. ábra

Elég tehát azt megmutatni, hogy $M''M'''$ merőleges az AK egyenesre. Mivel előbbi szakasz húrja a K középpontú körülírt körnek, az állítás következik abból, ha megmutatjuk, hogy A felezi a kör $M''M'''$ ívét. Mivel pedig az AM'' és AM''' távolságok az AM távolság tükörképei, s így a fölöttük levő ívek is egyenlők, tehát A valóban felezi az $M''M'''$ ívet, ebből pedig következik a bizonyítandó állítás.

Pintér László (Celldömölk, Gábor Áron g. IV. o. t.)