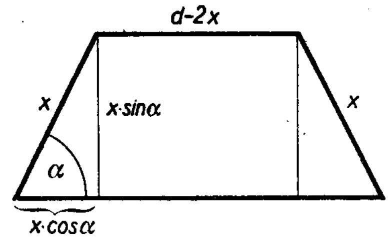
I. megoldás: Megoldhatjuk feladatunkat számítással. Egy tetszés szerinti, a feltételeknek megfelelő egyenlő szárú trapéz szárának hosszát jelöljük x-szel. A trapézek x-től függő $t(x)$ területe – ha $\alpha < 90^\circ$ – egy téglalapra és két derékszögű háromszögre bontható (1. ábra):



1. ábra

$$t(x) = (d-2x)x\sin\alpha + x^2\sin\alpha\cos\alpha = (\sin\alpha\cos\alpha - 2\sin\alpha)x^2 + (d\sin\alpha)x.,$$

(A képlet $\alpha \geq 90^\circ$-ra is helyesen adja a területet, mert ekkor a második tag 0 ill. negatív.)

Ez x-re nézve másodfokú függvény, melyben a négyzetes tag együtthatója $\sin\alpha(\cos\alpha - 2) < 0$, mert az első tényező az $0 < \alpha < 180^\circ$ intervallumban pozitív, a második tényező pedig negatív.

Tehát a $t(x)$ függvénynek az

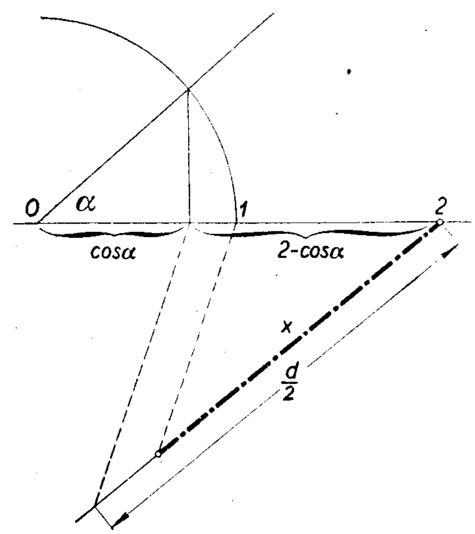
$$x_0 = \frac{-d\sin\alpha}{2\sin\alpha(\cos\alpha - 2)} = \frac{d}{2(2-\cos\alpha)}$$

helyen maximuma van.

Eszerint az x_0 szár a

$$(2-\cos\alpha) : \frac{d}{2} = 1 : x_0$$

aránypárból, negyedik arányosként megszerkeszthető (2. ábra).



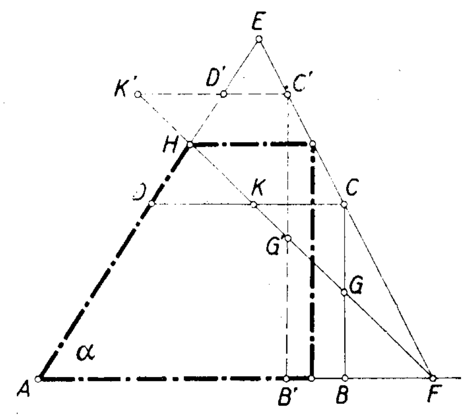
2. ábra

$$\alpha = 90^\circ \quad \text{esetén} \quad x = \frac{d}{4},$$

vagyis a trapéz téglalappá válik, amelynek oldalai $\frac{d}{4}$ és $\frac{d}{2}$.

Daróczy Zoltán (Debrecen, Ref. g. III. o. t.)

II. megoldás: A feladatot tisztán geometriai úton is megoldhatjuk. Ha egy – a terület maximális voltán kívül – a feltételeknek megfelelt trapézt a párhuzamos oldalak felezőpontján átmenő egyenessel kettévágunk, akkor olyan derékszögű trapézt kapunk, amelyben a ferde szár és az egyik párhuzamos oldal összege $\frac{d}{2}$, a másik párhuzamos oldalon pedig (a derékszögön kívül) α nagyságú szög van. Ezek közül kell tehát a legnagyobb területűt meghatároznunk.



3. ábra

Legyen $ABCD$ egy kívánt tulajdonságú trapéz (3. ábra). Hosszabbítsuk meg az AD ferde szárát a $DE = DC$ távolsággal. Tehát $AE = \frac{d}{2}$. Messe EC az AB egyenest F-ben. Ekkor nyilván az összes kívánt tulajdonságú trapézek A-val átellenes csúcsai az EF szakaszra esnek. Rajzoljuk meg a BC merőleges szár G felezőpontját. Az összes ilyen felezőpontok egy F-ből induló egyenesen sorakoznak. Messe ez az egyenes AE-t H-ban, az $ABCD$ trapéz CD oldalát vagy annak meghosszabbítását K-ban. A GCK háromszöget G-re tükrözve, látjuk, hogy az $ABCD$ trapéz területe a DHK háromszög területével kisebb az AFH háromszög területénél. Így a legnagyobb területű trapézt úgy kapjuk, hogy a H pontból párhuzamost húzunk AF-fel és ennek EF-fel való metszéspontjából merőlegest bocsátunk AF-re.

Az eljárás egyformán érvényes, ha α hegyesszög, derékszög vagy tompaszög.

Megjegyzés: Néhány megoldó úgy vélte a szerkesztést elvégezhetőnek, hogy tetszőleges sugarú körben megszerkesztette a maximális területű α szögű egyenlő szárú trapézt és azután – az adott d-nek megfelelően – ehhez hasonló, kisebb vagy nagyobb trapézt szerkesztett. Természetesen ez nem helyes, mert ilyen módon arra az esetre oldotta meg a feladatot, hogy α mellett *α köré írt kör sugara állandó.* Ez esetben azonban a szár változtatásával a d is változik, amint a kitűzött feladatban – midőn d állandó – a szár változtatásával a trapéz köré írt körének sugara változik.