I. megoldás: Az $x=0, x=1, x=\frac{1}{10}, x=\frac{1}{100}$ értékeket eleve kizárjuk, mert ez esetben a baloldal értelmetlen volna.

Felhasználva az

$$\log_a b=\frac{\lg b}{\lg a}$$

azonosságot kapjuk:

$$\log_x 10=\frac{1}{\lg x},\quad \log_{10x} 10=\frac{1}{\lg 10x}=\frac{1}{1+\lg x},\quad \log_{100x} 10=\frac{1}{\lg 100x}=\frac{1}{2+\lg x}.$$

Ezeket az értékeket egyenletünkbe helyettesítve:

$$\frac{1}{\lg x}+\frac{2}{1+\lg x}+\frac{3}{2+\lg x}=0,$$

vagyis

$$3(\lg x)^2+5\lg x+1=0,$$

amiből

$$\lg x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{6},$$

tehát

$$x_1=10^{\frac{-5+\sqrt{13}}{6}}\approx 0{,}5\,857\qquad x_2=10^{\frac{-5-\sqrt{13}}{6}}\approx 0{,}0\,368.$$

Mivel azonos átalakításokat végeztünk s a kapott gyökök egyike sem egyezik meg a kizárt értékekkel, azért egyenletünknek szükségképpen ezek és csak ezek a gyökei.

Lackner Györgyi (Bp. V.. Bolyai János textilip. techn. IV. o. t.)

II. megoldás: Legyen

$$\log_x 10=y,\qquad \log_{10x} 10=z,\qquad \log_{100x} 10=u.$$

Ennek értelmében

$$x^y=10,\tag{1}$$
$$x^z=10^{1-z},\tag{2}$$
$$x^u=10^{1-2u}.\tag{3}$$

(1)-ből

$$x=10^{\frac{1}{y}},$$

(2)-ből

$$x=10^{\frac{1-z}{z}},$$

(3)-ból

$$x=10^{\frac{1-2u}{u}},$$

tehát

$$10^{\frac{1}{y}}=10^{\frac{1-z}{z}}=10^{\frac{1-2u}{u}},$$

ahonnan

$$\frac{1}{y}=\frac{1-z}{z},\quad \text{amiből}\quad z=\frac{y}{1+y}$$
$$\frac{1}{y}=\frac{1-2u}{u},\quad \text{amiből}\quad u=\frac{y}{1+2y}$$

Ezen értékeket az egyenletbe behelyettesítve:

$$y+\frac{2y}{1+y}+\frac{3y}{1+2y}=0.$$

$y=0$ nem lehet, mert $x^0\neq 10$; oszthatunk tehát y-nal és a következő másodfokú egyenlethez jutunk:

$$y^2+5y+3=0,$$

innen

$$y_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}\,, \quad \text{és így} \quad x_{1,2}=10^{\frac{1}{y_{1,2}}}\,.$$

$$\frac{1}{y_{1,2}}=\frac{2}{-5\pm\sqrt{13}}=\frac{2(-5\pm\sqrt{13})}{25-13}=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{6}\,.$$

Tehát a nyert gyökök megegyeznek az I. megoldásban nyert gyökökkel.

Bakos Tamás (Bp. II., Rákóczi g. IV. o. t.)