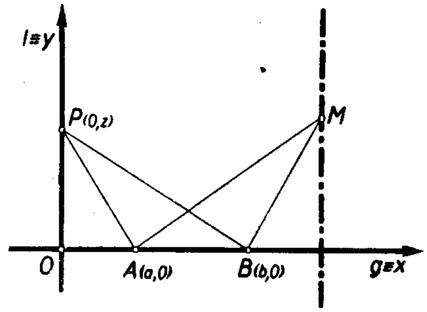
I. megoldás: Nem megy az általánosság rovására, ha koordináta-rendszerünk x tengelyéül a g egyenest, y tengelyéül pedig az l egyenest választjuk (1. ábra).



1. ábra

Az A pont koordinátái: $(a, 0)$, a B ponté: $(b, 0)$, a P ponté: $(0, z)$. Ha a, vagy b valamelyike, pl. $a = 0$ (azaz A éppen a két adott egyenes metszéspontja), akkor a kérdéses mértani hely egyetlen ponttá fajul el; ez a pont B.

A továbbiakban tegyük fel, hogy a és b egyike sem 0, és egyelőre zárjuk ki a $z = 0$ esetet (P ne legyen az origóban).

Az AP egyenes iránytangense: $-\frac{z}{a}$; a BP egyenes iránytangense: $-\frac{z}{b}$, tehát az A pontban AP-re emelt merőleges és a B-ben BP-re emelt merőleges egyenes egyenlete:

$$y = \frac{a}{z}(x - a) \qquad \text{és} \qquad y = \frac{b}{z}(x - b)$$

Az egyenletrendszert megoldva, nyerjük az M metszéspont koordinátáit

(1)
$$x = a + b, \qquad y = \frac{ab}{z}.$$

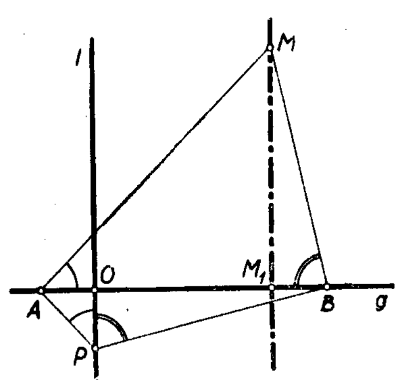
z minden értékéhez ($z = 0$-t kizártuk!) tartozik egy koordináta értékpár. Miután pedig x független z-től, az M pontok egy, az y tengellyel párhuzamos, egyenesen helyezkednek el, melynek egyenlete

$$x = a + b.$$

Hátra van még annak eldöntése, hogy az (1) egyenletrendszerrel jellemzett egyenes minden pontja hozzátartozik-e a mértani helyhez. Tekintve, hogy $y = \frac{ab}{z}$ szerint az egyenes minden pontjának y ordinátájához ($y = 0$ kivételével) tartozik egy $z\left(= \frac{ab}{y}\right)$ érték, ezzel együtt tartozik egy P pont is az y tengelynek választott l egyenesen. Az eddig kizárt $z = 0$ esetet úgy értelmezhetjük, mint amelynek az (1) egyenes végtelen távoli pontja felel meg, míg az l egyenes végtelen távoli pontjához az (1) egyenes $y = 0$-hoz tartozó pontját gondolhatjuk megfeleltetve. Ezzel a kiterjesztéssel most már mondhatjuk, hogy a keresett mértani hely a teljes $x = a + b$ egyenes vagyis az az egyenes, mely l-lel tükrös helyzetű az AB szakasz felezőpontjára nézve.

Bonyhárd Péter (Bp. VIII., Apáczai Csere g. IV. o. t.)

II. megoldás: Jelöljük g és l metszéspontját O-val.



2. ábra

Az $MAP\triangle$ és $MBP\triangle$ derékszögű, tehát Pythagoras tétele alapján (2. ábra)

$$AM^2 + AP^2 = MP^2 = BM^2 + BP^2,$$

azaz

$$AM^2 - BM^2 = BP^2 - AP^2.$$

De $\quad BP^2 = OP^2 + OB^2, \quad AP^2 = OP^2 + OA^2,$ és így

$$AM^2 - BM^2 = (OP^2 + OB^2) - (OP^2 + OA^2) = OB^2 - OA^2 = \text{állandó}.$$

Azonban ismeretes (lásd K. M. L. 423. sz. feladat megoldását 1952 okt. 47. old.), hogy azon pontok mértani helye a síkban, amelyeknek két adott ponttól mért távolságai négyzeteinek különbsége állandó: *egy egyenes, amely az adott pontok összekötésére merőleges.*

Dominyák Imre (Miskolc, Földes F. g. IV. o. t.)

III. megoldás: Tetszőleges P-hez tartozó M pontból g-re bocsátott merőleges talppontját M_1-gyel (2. ábra) jelölve, két pár hasonló derékszögű háromszög keletkezik:

$$MM_1A\triangle \sim AOP\triangle \qquad \text{és} \qquad MM_1B\triangle \sim BOP\triangle,$$

mert az ábrán egyformán jelölt szögek merőleges szárú szögek.

A megfelelő oldalak aránya egyenlő:

(1) $$\frac{MM_1}{M_1A} = \frac{AO}{OP}$$

(2) $$\frac{MM_1}{M_1B} = \frac{BO}{OP}$$

(1)-et elosztva (2)-vel, nyerjük, hogy

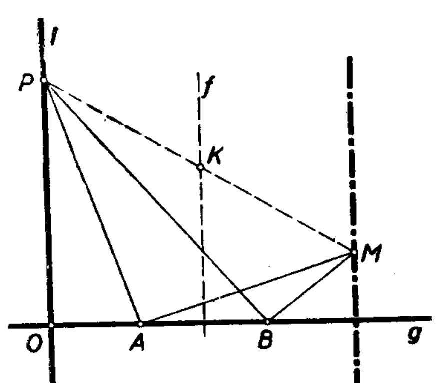
(3) $$\frac{M_1B}{M_1A} = \frac{AO}{BO} = \mathit{konstans}$$

Miután M_1, helyzete nem függ a P ponttól, az M pontok mértani helye az M, ponton átmenő, g-re merőleges egyenes. (3) szerint az M pont O-nak az AB szakasz felezőpontjára vonatkozó tükörképe.

Az M_1M egyenes minden pontja hozzátartozik a mértani helyhez, mert minden M-hez megtalálhatjuk az l egyenesen azt a P pontot, amelyből létrejött (ugyanazzal a szerkesztéssel, amellyel a P-ből nyerjük az M-et).

Heinemann Zoltán (Pécs, Bányaip. techn. II o. t.)

IV. megoldás: $ABMP$ (3. ábra, ill. $AMBP$ – 2. ábra) húrnégyszög, mert A-ból és B-ből a PM szakasz derékszög alatt látszik.

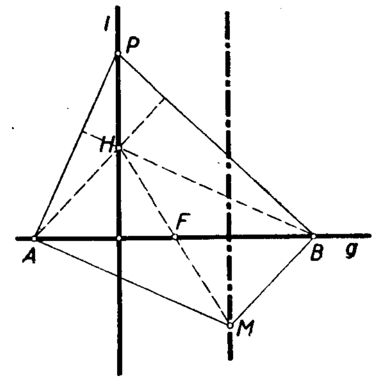


3. ábra

Thales tétele alapján PM a köréírt kör átmérője, K középpontja pedig az AB szakaszt merőlegesen felező f egyenesen van ($f \parallel l$). Az M pont tehát mindenkor a P pont tükörképe az f egyenesen mozgó K pontra nézve, vagyis az M pontok mértani helye az l egyenesnek f-re vonatkozó tükörképe.

Makkai Mihály (Bp. V., Eötvös g. II. o. t.)

V. megoldás: Szerkesszük meg az $APB\triangle$ H magassági pontját (4. ábra).



4. ábra

Az $AHBM$ négyszög paralelogramma, mert a szerkesztés szerint az egyik oldalpárja AP-re, a másik oldalpárja pedig BP-re merőleges. A paralelogramma középpontja az AB szakasz F felezőpontja. Az F pontra nézve M és H tükrös helyzetű. Ha P végigfut az l egyenesen, l állandóan az $APB\triangle$ magasságvonala marad, tehát a H magasságpontok mértani helye az l egyenes, s így az M pontok mértani helye az AB szakasz felezőpontjára nézve l-lel tükrös helyzetű egyenes.

Surán Gábor (Bp. V., Eötvös g. III. o. t.)