Jelöljük $f(x)$-et y-nal, $\varphi(z)$-t pedig v-vel. Az (1) függvény képe egy görbe vonal (negyedfokú parabola), abban a koordináta-rendszerben, melynek tengelyei x és y. Feladatunk *ugyanezen* görbe egyenletét (2) alakban előállítani új, z, v koordináta-rendszerben, illetőleg megadni a (2) alakra való transzformálhatóság feltételét. (Megjegyezzük, hogy csak lineáris, azaz elsőfokú, transzformációt keresünk.)

Céljainknak csak oly transzformáció felelhet meg, mely az

$$x = k \,(\text{konstans}) \tag{3}$$

egyeneseket a

$$z = k^* \,(\text{konstans}) \tag{4}$$

egyenesbe viszi át. Ugyanis $y = f(x)$ az x-nek egyértékű függvénye (x bármely értékéhez egy és csakis egy y érték tartozik), hasonlóképpen $v = \varphi(z)$ a z-nek egyértékű függvénye. Márpedig ha a $z = k^*$ egyenes megfelelője az eredeti $(x,\, y)$ koordináta-rendszerben nem $x = k$. alakú egyenes, hanem bármely más, pl.

$$y = mx + k \tag{5}$$

alakú egyenes, akkor (1) és (5) négy metszéspontjának a transzformálás után $z = k^*$-hoz tartozó négy függvényérték felelne meg, tehát a transzformált fügevény nem lehetne v-nek (2) alakú egyértékű függvénye.

A céljainknak megfelelő transzformáció új ordináta-tengelye v, tehát y-nal párhuzamos, eszerint x és z között a következő összefüggés áll fenn

$$x = z + \lambda \tag{6}$$

ahol λ konstans. Az új rendszer abszcissza-tengelye az x tengellyel egybeeshet, tehát

$$v = y \tag{7}$$

mert az abszcissza tengely párhuzamos eltolásával (2)-ben csak a konstans tag értéke változik meg, márpedig ez (2) alakját nem befolyásolja.

(Az egyszerű párhuzamos eltoláson kívül számításba jöhetne még az a transzformáció, melynél a koordináta-rendszert párhuzamosan eltoljuk, és *utána még* 180°*-kal el is forgatjuk.* Az elforgatás mindkét koordináta előjelét megváltoztatja, tehát (1)-et oly negyedfokú függvénybe viszi át, amelynek negyedfokú tagja negatív előjelű, tehát célunknak nem felel meg.)

Ezek után vizsgáljuk meg, hogy az egyetlen fajta transzformáció, mely céljainknak megfelelhet, az ordináta-tengelynek (6)-tal és (7)-tel adott párhuzamos eltolása, λ mely értéke mellett viszi át az (1) függvényt (2) alakúba. (6)-ot és (7)-et behelyettesítve (1)-be, nyerjük

$$v = \varphi(z) = (z+\lambda)^4 + a(z+\lambda)^3 + b(z+\lambda)^2 + c(z+\lambda) + d \tag{8}$$

Elvégezve a hatványozásokat és rendezve:

$$v = z^4 + (4\lambda + a)z^3 + (6\lambda^2 + 3\lambda a + b)z^2 + (4\lambda^3 + 3\lambda^2 a + 2\lambda b + c)z + \lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d \tag{8*}$$

Ez a kifejezés akkor és csak akkor (2) alakú, ha z páratlan kitevőinek együtthatója 0, azaz

$$4\lambda + a = 0; \tag{9}$$

$$\text{innen } \lambda = \frac{a}{4},$$

és

$$4\lambda^3 + 3\lambda^2 a + 2\lambda b + c = 0. \tag{10}$$

λ-nak (9)-ből nyert értékét behelyettesítve (10)-be, nyerjük:

$$a^3 - 4ab + 8c = 0. \tag{11}$$

Tehát annak, hogy (1) felírható legyen (2) alakban, szükséges és elégséges feltétele, hogy (1) együtthatói kielégítsék a (11) összefüggést.

Mivel $\varphi(-z) = \varphi(z)$, azért a φ függvény görbéje a v tengelyre szimmetrikus, vagyis a (11) feltétel teljesülése más szóval azt jelenti, hogy az $f(x)$ függvény képének van egy – az y tengellyel párhuzamos – szimmetria tengelye.

Rázga Tamás (Bp., II., Rákóczi g. III. o. t.)