I. megoldás: Egyenletrendszerünk így írható:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{13}{3}, \tag{1}$$

$$x+y+z=\frac{13}{3}, \tag{2}$$

$$xyz=1. \tag{3}$$

(1)-ből es (3)-ból következik, hogy a három ismeretlen egyike sem lehet 0, szorozhatjuk tehát (1)-et xyz-vel, és (2)-t x-szel. Nyerjük, hogy

$$yz+xz+xy=\frac{13}{3}xyz=\frac{13}{3}, \tag{4}$$

$$x^2+xy+xz=\frac{13}{3}x. \tag{5}$$

(5)-ből kivonva (4)-et

$$x^2-yz=\frac{13}{3}x-\frac{13}{3}.$$

(3) alapján yz helyébe $\frac{1}{x}$-et írva, x-szel szorozva és rendezve

$$x^3-\frac{13}{3}x^2+\frac{13}{3}x-1=0.$$

A baloldal átalakítható a következőképpen:

$$x^3-1-\frac{13}{3}x(x-1)=(x-1)(x^2+x+1)-\frac{13}{3}x(x-1)=$$
$$=(x-1)\left(x^2-\frac{10}{3}x+1\right)=0,$$

amiből

$$x_1=1,$$

a másodfokú tényező szolgáltatta egyenlet két gyöke pedig

$$x_2=3, \quad x_3=\frac{1}{3}.$$

x ezen értékeit (2) és (3)-ba helyettesítve, nyerjük a teljes gyökrendszert:

$x=1$	1	3	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$y=3$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	1	3
$z=\frac{1}{3}$	3	$\frac{1}{3}$	1	3	1

Bartók Károly (Székesfehérvár, József Attila g. II. o. t.)

II. megoldás: A harmadfokú egyenlet gyöktényezős alakja

$$a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0.$$

Ha $a-1$, akkor

$$x^3-(x_1+x_2+x_3)x+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3=0.$$

A (2), (3) és (4) egyenleteket figyelembe véve, egyenletrendszerünk 3 gyöke tehát megegyezik a következő harmadfokú egyenlet 3 gyökével.

$$x^3-\frac{13}{3}x+\frac{13}{3}x-1=0.$$

A nyert 3 gyök $3!=6$ permutációja adja egyenletrendszerünk 6 gyökhármasát. ásmallskip

Vigassy György (Budapest, I., Petőfi g. IV. o. t.)