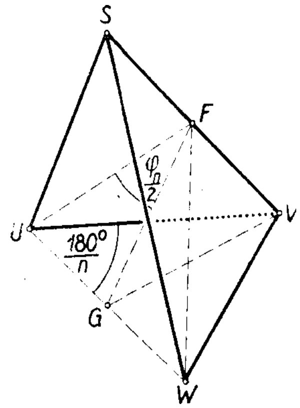
Mivel az oldalélek száma megegyezik az alapélek számával, azért a feladat kikötéséből következik, hogy az oldalélek hosszúsága egyenlő az alapélek hosszúságával, vagyis a gúla oldallapjai egyenlő oldalú háromszögek. n oldalú gúlánál ($n \geqq 3$) a csúcsnál levő testszöglet élszögeinek összege $n \cdot 60^\circ < 360^\circ$, amiből $n < 6$. Tehát csak $n = 3$, 4 és 5 jöhet számításba.

Tekintsük egy a élű, S csúcsú és n oldalú ($n = 3$, 4, 5) szabályos gúlának két szomszédos lapját (lásd ábrát).



A keresett φ_n lapszöget megkapjuk, ha az UW alaplapátló ($n = 3$ esetén alapél) végpontjaiból merőlegeseket bocsátunk az SV oldalélre. Ezek a merőlegesek az SV oldalélhez tartozó két egyenlőoldalú gúlaoldallap magasságvonalai, tehát az SV oldalél felezőpontjában, F-ben metszik egymást. Eszerint tehát

$$FU = FW = \frac{a}{2}\sqrt{3} \qquad \text{és} \qquad UFW\sphericalangle = \varphi_n.$$

Az UWF és UWV egyenlőszárú háromszögek közös UW alapjának felezőpontját jelöljük G-vel. FG és VG az említett két háromszög közös UW alapjához tartozó magasságok.

A szabályos n szögű ($n = 3$, 4, 5) alaplap szöge $UVW\sphericalangle = \dfrac{(n-2)180^\circ}{n}$. Ennek fele $UVG\sphericalangle = \dfrac{(n-2)90^\circ}{n}$, és így a GUV pótlószög $90^\circ - \dfrac{(n-2)90^\circ}{n} = \dfrac{180^\circ}{n}$.

Az FGU derékszögű háromszögből

$$\sin\frac{\varphi_n}{2} = \frac{GU}{FU},$$

a VGU derékszögű háromszögből

$$GU = VU\cos GUV\sphericalangle = a\cos\frac{180^\circ}{n}$$

és így

$$\sin\frac{\varphi_n}{2} = \frac{a\cos\dfrac{180^\circ}{n}}{\dfrac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{180^\circ}{n}.$$

Tehát $n = 3$ esetén

$$\sin\frac{\varphi_3}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

amiből (négyjegyű lg-táblát használva)

$$\frac{\varphi_3}{2} = 35^\circ 16', \qquad \text{és így} \qquad \varphi_3 = 70^\circ 32'.$$

Hasonlóképpen

$$\sin\frac{\varphi_4}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos 45^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

amiből

$$\frac{\varphi_4}{2} = 54^\circ 44', \qquad \text{és így} \qquad \varphi_4 = 109^\circ 28',$$

és végül

$$\sin\frac{\varphi_5}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos 36^\circ,$$

amiből

$$\frac{\varphi_5}{2} = 69^\circ 06', \qquad \text{és így} \qquad \varphi_5 = 138^\circ 12'.$$

Szabados József (Bp. III., Árpád g. III. o. t.)

Megjegyzés: Feladatunkban a szabályos gúla oldallapjainak az alap melletti két egyenlő szöge 60° volt. Általánosíthatjuk a feladatot, ha 60° helyett tetszőleges α hegyesszöget engedünk meg. Ez esetben természetesen n 5-nél nagyobb értékeket is felvehet.

Most $FU = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ helyett $FU = a\sin\alpha$,
és így

$$\sin\frac{\varphi_n}{2} = \frac{a\cos\frac{180^\circ}{n}}{a\sin\alpha} = \frac{\cos\frac{180^\circ}{n}}{\sin\alpha}$$

Szükséges természetesen, hogy a gúla csúcsánál levő testszöglet élszögeinek összegére fennálljon, hogy

$$n(180^\circ - 2\alpha) < 360^\circ,$$

vagyis

$$3 \le n < \frac{360^\circ}{180^\circ - 2\alpha} \tag{2}$$

(2)-ből következik, hogy szükségképpen $\alpha > 30^\circ$.

Feladatunkban $\alpha = 60^\circ$, mely esetben az (1) és (2) alatti összefüggések feladatunk fenti megoldásában szereplő összefüggésekbe mennek át.

Csiszár Imre (Bp. I., Petőfi g. III. o. t.)