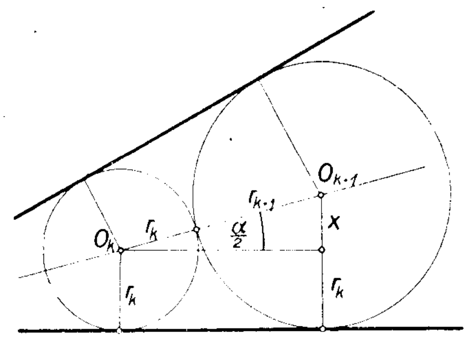
I. megoldás: Legyenek a körök sugarai rendre $r_1, r_2, \ldots, r_k, r_{k+1}, \ldots, r_n$.
r_k ismeretében a rákövetkező kör r_{k+1} sugara kiszámítható. A betűzést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

$$r_{k+1} = r_k + x = r_k + O_kO_{k+1} \sin\frac{\alpha}{2} =$$
$$= r_k + (r_k + r_{k+1}) \sin\frac{\alpha}{2},$$

vagyis

$$r_{k+1} - r_{k+1} \sin\frac{\alpha}{2} = r_k + r_k \sin\frac{\alpha}{2},$$

és így

$$r_{k+1} = r_k \frac{1 + \sin\dfrac{\alpha}{2}}{1 - \sin\dfrac{\alpha}{2}}, \quad \text{ahol} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Az $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sugarak tehát mértani sorozatot alkotnak, amelynek hányadosa $q = \dfrac{1 + \sin\dfrac{\alpha}{2}}{1 - \sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

A keresett terület tehát

$$T = t_1 + t_2 + \ldots + t_n = \pi(r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2).$$

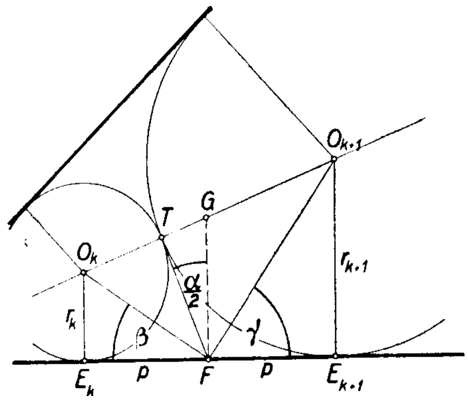
Az előbbiek alapján a zárójelben álló kifejezés olyan mértani sorozat, amelynek első tagja r_1^2 és hányadosa $\left(\dfrac{1 + \sin\dfrac{\alpha}{2}}{1 - \sin\dfrac{\alpha}{2}}\right)^2$.

A mértani sorozat összegképletét felhasználva

$$T = r_1^2 \pi \frac{\left(\dfrac{1 + \sin\dfrac{\alpha}{2}}{1 - \sin\dfrac{\alpha}{2}}\right)^{2n} - 1}{\left(\dfrac{1 + \sin\dfrac{\alpha}{2}}{1 - \sin\dfrac{\alpha}{2}}\right)^{2} - 1}.$$

Kismarty Loránd (Pannonhalma, Bencés g. I. o. t.)

II. megoldás: Az $\dfrac{r_{k+1}}{r_k} = q$, n-től független, állandó viszonyszám másképpen is meghatározható. A két szomszédos kör közös T érintőpontjában megrajzolt közös érintő messe a szög egyik szárát F-ben. A betűzést a 2. ábra mutatja.



2. ábra

Az F-ben a szögszárra emelt merőlegesnek a centrális egyenessel való metszéspontja legyen G. A $TFG\sphericalangle$, mint merőleges szárú szög egyenlő $\dfrac{\alpha}{2}$-vel. A $TFE_k\sphericalangle$, ill. $TFE_{k+1}\sphericalangle$ felezőjének az E_kE_{k+1} szögszárral bezárt szögét β-val, illetőleg γ-val jelölve, nyilván

$$\beta=\frac{90^\circ-\dfrac{\alpha}{2}}{2}=45^\circ-\frac{\alpha}{4}\quad \text{és}\quad \gamma=\frac{90^\circ+\dfrac{\alpha}{2}}{2}=45^\circ+\frac{\alpha}{4}.$$

Legyen $FT=FE_k=FE_{k+1}=p$, akkor

$$r_k=FE_k\cdot\operatorname{tg}\beta=p\cdot\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right),$$
$$r_{k+1}=FE_{k+1}\cdot\operatorname{tg}\gamma=p\cdot\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\alpha}{4}\right),$$

és így

$$\frac{r_{k+1}}{r_k}=q=\frac{\operatorname{tg}\left(45^\circ+\dfrac{\alpha}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{4}\right)}.$$

q ezen alakjával a területek összege

$$T=r_1^2\pi\frac{\dfrac{\operatorname{tg}^{2n}\left(45^\circ+\dfrac{\alpha}{4}\right)}{\operatorname{tg}^{2n}\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{4}\right)}-1}{\dfrac{\operatorname{tg}^{2}\left(45^\circ+\dfrac{\alpha}{4}\right)}{\operatorname{tg}^{2}\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{4}\right)}-1}=$$

$$=r_1^2\pi\frac{\operatorname{tg}^{2n}\left(45^\circ+\dfrac{\alpha}{4}\right)-\operatorname{tg}^{2n}\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{4}\right)}{\operatorname{tg}^{2(n-1)}\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{4}\right)\left[\operatorname{tg}^{2}\left(45^\circ+\dfrac{\alpha}{4}\right)-\operatorname{tg}^{2}\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{4}\right)\right]}$$

alakban adódik.

Bausz Imre (Sopron, Széchenyi g. IV. o. t.)

Megjegyzés: A q utóbbi értékét az I. megoldásban nyert értékből közvetlenül is megkaphatjuk, ha az $1+\sin\dfrac{\alpha}{2}=\sin 90^\circ+\sin\dfrac{\alpha}{2}=2\sin\dfrac{90^\circ+\dfrac{\alpha}{2}}{2}\cos\dfrac{90^\circ-\dfrac{\alpha}{2}}{2}=2\sin\left(45^\circ+\dfrac{\alpha}{4}\right)\cos\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{4}\right)$ és $1-\sin\dfrac{\alpha}{2}=2\cos\left(45^\circ+\dfrac{\alpha}{4}\right)\sin\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{4}\right)$ helyettesítést végezzük el.