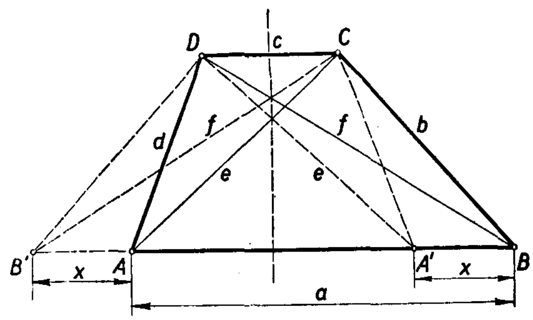
E feladat igen termékenynek bizonyult. Nagyon sokféle megoldás érkezett be. Legtöbbnyire a cosinus-tételt használták fel a megoldók (többféleképpen is), de több másfajta megoldás között szerepelt az $a^2+b^2+c^2+d^2=e^2+$ $+f^2+4g^2$ összefüggés, ahol $g$ az átlók felezőpontjainak egymástól való távolsága, valamint a súlyvonal hosszát megadó azonosság $\left(s_a^2=\frac{2b^2+2c^2+a^2}{4}\right.$, lásd 510. sz. feladatot, VI. köt. 88. old. 1953. nov.) is. A sokféle megoldásból az alábbi hármat választottuk ki, mint a legegyszerűbbeket és a legfrappánsabbakat. Ezek közül a legegyszerűbb a tétel általánosítását is lehetővé teszi.

**I. megoldás:** A betűzést az 1. ábra mutatja.




*1. ábra*

Az egyik párhuzamos (pl. a $CD=c$) oldalt merőlegesen felező egyenesre tükrözzük az $AD$ és $BC$ szárakat, nyerjük az $AA'CD$, ill. $B'BCD$ egyenlőszárú trapézeket.

$$AA'=AB-A'B=a-x,$$
$$B'B=AB+B'A=a+x.$$

Ezen egyenlőszárú trapézekre, mint húrnégyszögekre, alkalmazva Ptolemaios tételét

(1) $$e^2=d^2+c(a-x),$$

(2) $$f^2=b^2+c(a+x).$$

(1) és (2) összege

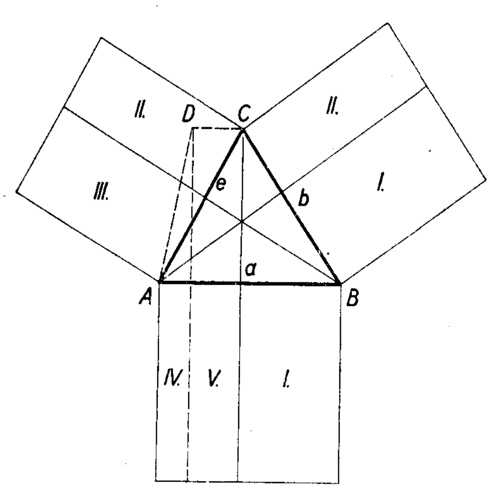
$$e^2+f^2=b^2+d^2+2ac$$

szolgáltatja a bebizonyítandó tételünket.

*Dancs Mária* (Bp. II., Hámán Katalin lg. IV. o. t.)
*Szeidl Béla* (Bp. VIII., Apáczai Csere g. III. o. t.)

**II. megoldás:** Ismeretes, hogy egy csúcsból kiinduló két háromszögoldal bármelyikéből és a második oldalnak az előbbi oldalon levő merőleges vetületéből alkotott egy-egy téglalap területe egyenlő ($b\cdot c\cos\alpha=c\cdot b\cos\alpha$). Ez igaz akár hegyes-, akár tompa-, akár derékszöget zár be a két oldal. (Utóbbi esetben mindkét téglalap területe külön-külön 0.) Ilyen módon bármely háromszögnek mind a három csúcspontjánál keletkezik 2–2 ilyen egyenlő területű téglalap.

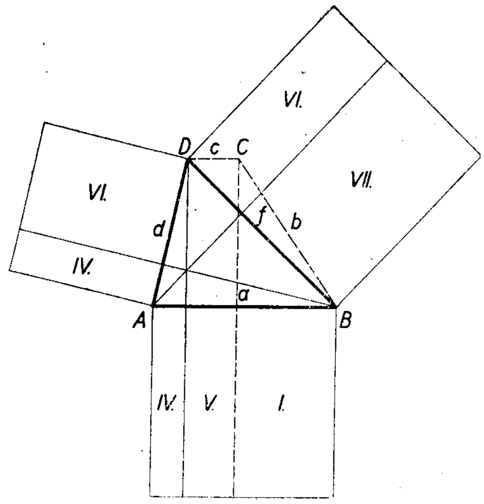
Alkalmazzuk e tételt $ABCD$ trapézünk $ABC$ (2. ábra) és $ABD$ (3. ábra) háromszögére. Mindkét ábrában az egyenlő területű téglalapokat ugyanazzal a római számmal jelöltük. III = IV + V és VII = I + V.




*2. ábra*

A 2. ábrán az előbbiek alapján

$$e^2 = \mathrm{II} + \mathrm{III} = \mathrm{II} + \mathrm{IV} + \mathrm{V}, \quad \text{és} \quad b^2 = \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$




*3. ábra*

A 3. ábrán

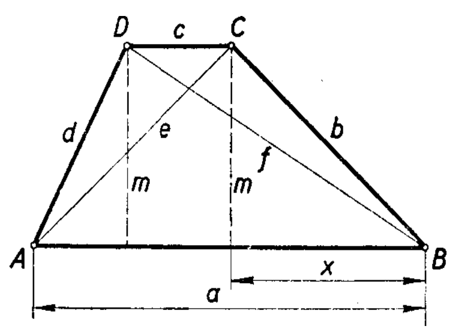
$$f^2 = \mathrm{VI} + \mathrm{VII} = \mathrm{VI} + \mathrm{I} + \mathrm{V}, \quad \text{és} \quad d^2 = \mathrm{IV} + \mathrm{VI}.$$

Tehát

$$e^2 + f^2 = (\mathrm{I} + \mathrm{II}) + (\mathrm{IV} + \mathrm{VI}) + 2 \cdot \mathrm{V} = b^2 + d^2 + 2ac.$$

*Pesti András* (Bp. XI., József A. g. III. o. t.)

**III. Megoldás:** Pythagoras-tétele is elegendő tételünk bizonyításához, sőt általánosításához is. Húzzuk meg a $C$ és $D$ pontokból a trapéz $m$ magasságát.




*4. ábra*

A betűzést a 4. ábra mutatja.

(3) $$e^2 = m^2 + (a-x)^2 = m^2 + a^2 - 2ax + x^2,$$

(4) $$f^2 = m^2 + (c+x)^2 = m^2 + c^2 + 2cx + x^2,$$

(5) $$b^2 = m^2 + x^2,$$

(6) $$d^2 = m^2 + (a-c-x)^2 = m^2 + a^2 - 2ac + c^2 - 2ax + 2cx + x^2.$$

Tehát (3) és (4) összege

$$e^2 + f^2 = (m^2 + x^2) + (m^2 + a^2 + c^2 - 2ax + 2cx + x^2).$$

A jobboldalon az első zárójelben levő kifejezés értéke (5) alapján $b^2$, a második zárójelben levő kifejezés értéke (6) alapján $d^2 + 2ac$, és így

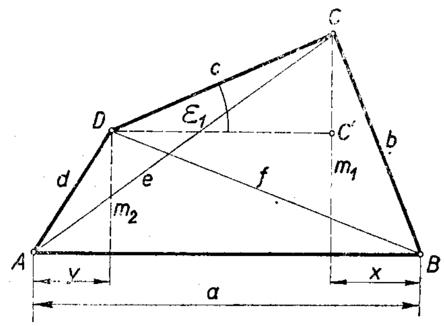
$$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac.$$

*Megjegyzés:* Megmutatjuk, hogy általános négyszögben

$$e^2+f^2=b^2+d^2+2ac\cos\varepsilon_1=a^2+c^2+2bd\cos\varepsilon_2,$$

ahol $\varepsilon_1$ az $a$ és $c$, $\varepsilon_2$ a $b$ és $d$ oldalak által bezárt szög. (Jelen feladatunk állítása ezen általánosabb tételnek speciális esete, midőn $\varepsilon_1=0$.)

A bizonyítás az előbbihez hasonló.




*5. ábra*

A betűzést az 5. ábra mutatja.

(7) $$m_1=b^2-x^2=e^2-(a-x)^2$$

(8) $$m_2=d^2-y^2=f^2-(a-y)^2$$

(7)-ből

(7′) $$2ax=a^2+b^2-e^2,$$

(8)-ból

(8′) $$2ay=a^2+d^2-f^2.$$

(7′) és (8′) összege

$$2a(x+y)=2a^2+b^2+d^2-e^2-f^2,$$

amiből

$$e^2+f^2=b^2+d^2+2a(a-x-y),$$

de $a-x-y=DC'=c\cos\varepsilon_1$, és így

$$e^2+f^2=b^2+d^2+2ac\cos\varepsilon_1.$$

Hurkolt négyszög esetén $\varepsilon_1$ helyébe annak kiegészítő szöge $180-\varepsilon_1$ lép. Hurkolt trapéz esetén, $\cos 180^\circ=-1$ miatt,

$$e^2+f^2=b^2+d^2-2ac.$$

*Rázga Tamás* (Bp. II., Rákóczi g. III. o. t.)