I. megoldás. Egyenletünk baloldalában $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$-et kiemelve

$$\begin{aligned}\sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = \\ &= \sin^4 x - \sin^2 x(1-\sin^2 x) + (1-\sin^2 x)^2 = \\ &= \sin^4 x - \sin^2 x + \sin^4 x + 1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x = 3\sin^4 x - 3\sin^2 x + 1 = \frac{7}{16},\end{aligned}$$

vagyis

$$3\sin^4 x - 3\sin^2 x + \frac{9}{16} = 0,$$

azaz

$$\sin^4 x - \sin^2 x + \frac{3}{16} = 0,$$

amiből

$$\sin^2 x = \frac{1 \pm \frac{1}{2}}{2} = \frac{2 \pm 1}{4},$$

és így

$$\sin^2 x_{1,2} = \frac{3}{4}, \qquad \sin^2 x_{3,4} = \frac{1}{4},$$

vagyis

$$\sin x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sin x_{3,4} = \pm\frac{1}{2}.$$

Tehát a keresett gyökök

$$x_1 = 60^\circ \pm k\pi, \quad x_2 = 120^\circ \pm k\pi, \quad x_3 = 30^\circ \pm k\pi, \quad x_4 = 150^\circ \pm k\pi$$
$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

0° és 360° között tehát 8 főérték található.
Az összes gyökök összefoglalhatók a következő képletben:

$$x = \pm 30^\circ \pm k \cdot 90^\circ = \pm(3k \pm 1)30^\circ \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Szatmári Zoltán (Bp. VIII., Piarista g. II. o. t.)

II. megoldás:

$$\begin{aligned}(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 &= \sin^6 x + 3\sin^4 x \cos^2 x + 3\sin^2 x \cos^4 x + \cos^6 x = \\ &= \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x).\end{aligned}$$

Elvégezve a

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ és } \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16} \text{ helyettesítéseket,}$$
$$\text{nyerjük } 1 = \frac{7}{16} + 3\sin^2 x \cos^2 x,$$

vagyis rendezve

$$3\sin^2 x \cos^2 x = \frac{9}{16}.$$

$\frac{4}{3}$-dal szorozva

$$(2\sin x \cos x)^2 = \frac{3}{4},$$

amiből

$$2\sin x \cos x = \sin 2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Tehát

$$2x = \pm\frac{\pi}{3} \pm k\pi, \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

és így

$$x = \pm\frac{\pi}{6} \pm k\frac{\pi}{2} = \pm(3k \pm 1)\frac{\pi}{6}. \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Gerencsér Piroska (Bp. VIII., Zrínyi I. lg. IV. o. t.)