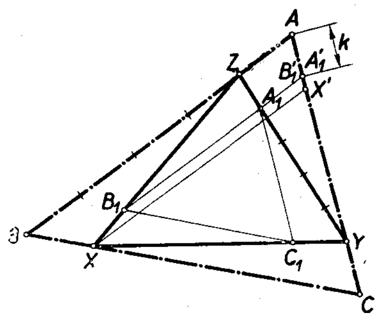
I. megoldás: Képzeljük a feladatot megoldottnak. A betűzést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Osszuk fel az $XYZ\triangle$ oldalait az A_1, B_1, C_1 pontokkal $\dfrac{A_1Y}{A_1Z} = \dfrac{B_1Z}{B_1X} = \dfrac{C_1X}{C_1Y} = \dfrac{1}{\lambda}$ arányban. Be fogjuk bizonyítani, hogy az $A_1B_1C_1\triangle$ oldalai rendre párhuzamosak az $ABC\triangle$ oldalaival.

Húzzuk az X, A_1 és B_1 pontokon keresztül párhuzamosokat az AB oldallal, és messék ezek a párhuzamosok az AC oldalt rendre az X', A_1', B_1' pontokban.

$$\frac{X'C}{X'A} = \frac{XC}{XB} = \frac{1}{\lambda} = \frac{YA}{YC}.$$

Ebből következik, hogy

$$AX' = YC = \lambda \cdot YA. \tag{1}$$

Jelöljük az egyszerűség kedvéért az $A_1'A$ távolságot k-val. ($AA_1' = -k$.)

$$\frac{A_1'Y}{k} = \frac{A_1Y}{A_1Z} = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{amiből} \quad A_1'Y = \frac{k}{\lambda} \tag{2}$$

(1) és (2) figyelembevételével

$$\frac{A_1'A}{A_1'X'} = \frac{k}{AX' - AA_1'} = \frac{k}{AX' + k} = \frac{k}{\lambda \cdot YA + k} = \frac{k}{\lambda(YA_1' + A_1'A) + k} =$$
$$= \frac{k}{\lambda\left(-\dfrac{k}{\lambda} + k\right) + k} = \frac{k}{-k + \lambda k + k} = \frac{1}{\lambda}.$$

De ugyanilyen arányban osztja a B_1' pont is a AX' távolságot. Ugyanis

$$\frac{B_1'A}{B_1'X'} = \frac{B_1Z}{B_1X} = \frac{1}{\lambda}.$$

Tehát

$$A_1' \equiv B_1',$$

vagyis tényleg

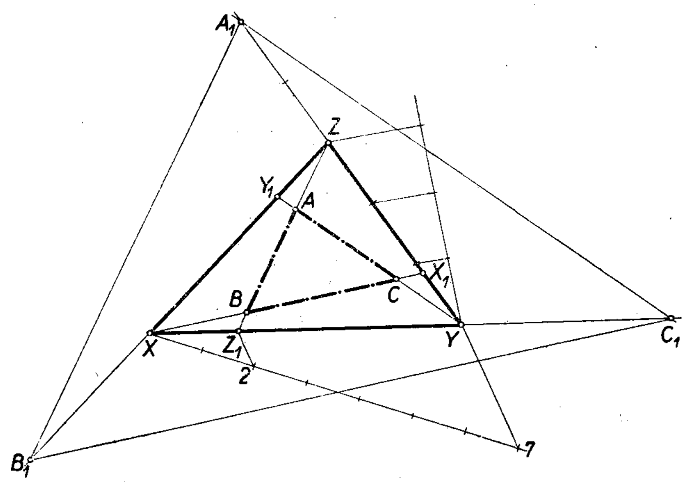
$$A_1B_1 \parallel AB.$$

Eszerint a szerkesztés menete: Megszerkesztjük az $XYZ\triangle$ oldalain az A_1, B_1, C_1 pontokat úgy, hogy

$$\frac{A_1Y}{A_1Z} = \frac{B_1Z}{B_1X} = \frac{C_1X}{C_1Y} = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{és a} \quad Z, X, Y$$

pontokon át rendre párhuzamosokat húzunk az $A_1B_1C_1\triangle$ oldalaival.

$$\lambda = -\frac{1}{4} \quad \text{esetén} \quad \frac{1}{\lambda} = -4 \quad \text{(1. ábra)}$$
$$\lambda = \frac{2}{5} \quad \text{esetén} \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{5}{2} \quad \text{(2. ábra).}$$



2. ábra

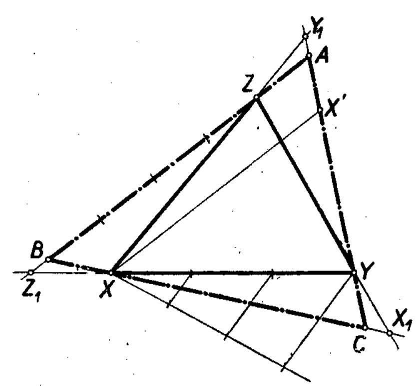
Speciális esetek:

$\lambda = 0$ esetén $A_1 \equiv Z$, $B_1 \equiv X$, $C_1 \equiv Y$, és így $A \equiv Z$, $B \equiv X$, $C \equiv Y$.

$\lambda = -1$ esetén $\dfrac{1}{\lambda} = -1$, és így az A_1, B_1, C_1 pontok az $XYZ\triangle$ oldalainak felezőpontjai, tehát az $A_1B_1C_1\triangle$ oldalai az $XYZ\triangle$ középvonalai, vagyis $AB \parallel XY$, $BC \parallel YZ$, $CA \parallel ZX$. (Triviális eset, midőn X, Y, Z az $ABC\triangle$ oldalainak felezőpontjai.)

$\lambda = 1$ esetén $\dfrac{1}{\lambda}$ is egyenlő az egységgel, és szerkesztésünk csődöt mond, mert az A_1, B_1, C_1 pontok nincsenek a végesben. Ez esetben tulajdonképpen a sík bármely P pontja tekinthető egy ponttá fajuló megoldásnak ($A \equiv B \equiv C \equiv P$).

II. megoldás: Képzeljük a feladatot megoldottnak. A betűzést a 3. ábra mutatja.



3. ábra

Jelöljük az AB és XY egyenesek metszéspontját Z_1-gyel. Az X ponton keresztül AB-vel párhuzamos egyenes messe az AC oldalt X'-ben (3. ábra).

$$\frac{BC}{BX} = \frac{BX + XC}{BX} = 1 - \frac{XC}{XB} =$$
$$= 1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda - 1}{\lambda} = \frac{AC}{AX'},$$

amiből

$$AX' = \frac{\lambda \cdot AC}{\lambda - 1} = -\frac{\lambda \cdot AC}{1 - \lambda} \tag{1}$$

(Végesben fekvő osztópont esetén $\lambda \neq 1$, vagyis $\lambda - 1 \neq 0$).

$$\frac{CA}{CY} = \frac{CY + YA}{CY} = 1 - \frac{YA}{YC} = 1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda - 1}{\lambda},$$

ahonnan

$$CY = \frac{\lambda \cdot CA}{\lambda - 1} = \frac{\lambda \cdot AC}{1 - \lambda}. \tag{2}$$

(2) felhasználásával

$$AY = AC + CY = AC + \frac{\lambda \cdot AC}{1 - \lambda} = \frac{AC - \lambda \cdot AC + \lambda \cdot AC}{1 - \lambda} = \frac{AC}{1 - \lambda}. \tag{3}$$

(1) és (3) figyelembevételével

$$\frac{Z_1X}{Z_1Y} = \frac{AX'}{AY} = \frac{-\dfrac{\lambda \cdot AC}{1-\lambda}}{\dfrac{AC}{1-\lambda}} = -\lambda.$$

Tehát a szerkesztés menete: Megszerkesztjük $XYZ\triangle$ oldalain rendre a Z_1, X_1, Y_1 pontokat úgy, hogy $\frac{Z_1X}{Z_1Y} = \frac{X_1Y}{X_1Z} = \frac{Y_1Z}{Y_1X} = -\lambda$; a ZZ_1, XX_1, YY_1 egyenesek rendre az $ABC\triangle$ oldalainak hordozói.

$\lambda = -\frac{1}{4}$ esetén $-\lambda = \frac{1}{4}$ (3. ábra),

$\lambda = \frac{2}{5}$ esetén $-\lambda = -\frac{2}{5}$ (2. ábra).

Speciális esetek:

$\lambda = 0$ esetén $-\lambda$ is egyenlő nullával, vagyis $Z_1 \equiv X$, $X_1 \equiv Y$ és $Y_1 \equiv Z$ és így $A \equiv Z$, $B \equiv X$, $C \equiv Y$.

Ha $\lambda = -1$, akkor $-\lambda = 1$, vagyis $ZZ_1 \parallel XY$, $XX_1 \parallel YZ$, $YY_1 \parallel ZX$. (Triviális eset, midőn az X, Y, Z pontok felezik az $ABC\triangle$ oldalait.)

$\lambda = 1$ esetén $-\lambda = -1$, vagyis az XX_1, YY_1, ZZ_1 egyenesek az $XYZ\triangle$ súlyvonalai, és így az ABC – mint határeset – az $XYZ\triangle$ súlypontjává fajul. ($A \equiv B \equiv C \equiv S$. – Lásd I. megoldást.)

Megjegyzés: Egy megoldó sem dolgozott irányított távolságokkal, és senki sem adott általános érvényű, egységesen az osztóviszonnyal kifejezett megoldást.