I. megoldás: Legyen $AP = x$ a tetraéder éle akkor a tetraéder felszíne $4 \cdot \frac{x^2}{4}\sqrt{3} = x^2\sqrt{3}$, a hexaéder felszíne $6(a-x)^2$.

Tehát az

$$y = x^2\sqrt{3} + 6(a-x)^2 = (6+\sqrt{3})x^2 - 12ax + 6a^2$$

másodfokú függvény minimumát keressük. (Minimum van, mert x^2 együtthatója pozitív.)

Ismeretes, hogy az $y = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvénynek szélső értéke az $x_0 = -\frac{b}{2a}$ helyen van. Jelen esetre alkalmazva

$$x_0 = \frac{12a}{12+2\sqrt{3}} = \frac{6a}{6+\sqrt{3}}.$$

Tehát

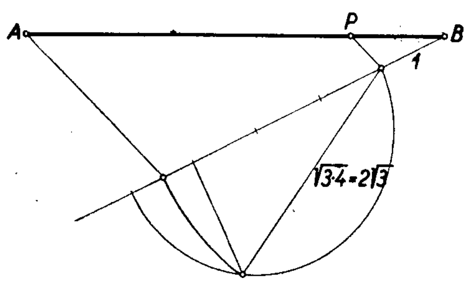
$$AP = \frac{6a}{6+\sqrt{3}},$$

$$BP = a - x = a - \frac{6a}{6+\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6+\sqrt{3}}$$

és így

$$\frac{AP}{PB} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{1} = \frac{\sqrt{12}}{1},$$

Az AB távolságnak a $\sqrt{3\cdot 4} : 1$ arányban való osztását az 1. ábra mutatja.



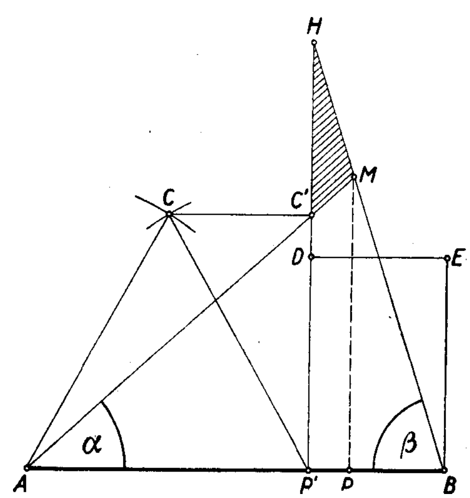
1. ábra

$\sqrt{12}$-t, mint 3 és 4 közötti mértani középarányost szerkesztettük meg a derékszögű háromszög ismeretes arányossági tétele alapján.

Frivaldszky Sándor (Bp. II., Rákóczi g. II. o. t.)

II. megoldás: Minden számítás nélkül is megszerkeszthetjük a minimális felszínt és ezzel a P pontot.

A felszín negyedrésze éppen egy tetraéderlap és 1,5 kockalap felszínének összege. Vizsgáljuk meg, miként változik e két terület összege, ha a P pont végigfut az AB szakaszon.



2. ábra

A P pont tetszőleges helyzetét jelöljük P'-vel (2. ábra); a hozzátartozó tetraéderlap az ACP' szabályos háromszög, a P'-höz tartozó 1,5 kockalap olyan téglalappal szemléltethető, melynek egyik oldala BP', a másik $BE = P'D = 1{,}5\, P'B$. Mindkét idomot alakítsuk át derékszögű háromszöggé úgy, hogy a közös befogójuk a P'-ben AB-re emelt merőleges legyen, másik befogójuk $P'A$, ill. $P'B$. A tetraéderlap területe az $AP'C'$ háromszöggel helyettesíthető, a kockalap területe pedig a $BP'H'$ háromszöggel ($P'H' = 3P'B$). Az átfogók egyenese független a P' pont helyzetétől, mert az A-ból kiinduló átfogó AB-vel bezárt szögére nézve, fennáll, hogy $\operatorname{tg}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, a B-ből kiinduló átfogónak AB-vel bezárt szögére pedig $\operatorname{tg}\,\beta = 3$. E két rögzített egyenes metszéspontját jelöljük M-mel. A P' pont változtatásával C' az AM átfogón mozog, H' pedig a BM átfogón.

A két poliéder felszínének negyedrészét az $AC'H'B$ négyszög szemlélteti. E négyszög az AMB állandó háromszögből és a srafozott $MC'H'$ változó háromszögből tevődik össze. P' változtatásával csak ez utóbbi háromszög területe változik; legkisebb akkor, ha éppen 0, azaz C' és H' egybeesik M-mel.

M pont és a hozzátartozó P szerkesztése az ábrából leolvasható.

Megjegyzés: Most a megszerkesztett AP távolság hosszát számíthatjuk ki utólag a szerkesztés alapján az α és β szögek segítségével. Ugyanis $MP = x \operatorname{tg}\,\alpha = (a-x)\operatorname{tg}\,\beta$, vagyis $x\dfrac{\sqrt{3}}{2} = (a-x)3$, amiből $x = \dfrac{6a}{6+\sqrt{3}}$.

Katz Tibor (Hajdúnánás, Körösi Csoma g. III. o. t.)