I. megoldás: Az ismert

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

képlet felhasználásával

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{4}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\frac{b}{c}}{1+\frac{b}{c}}=\frac{c-b}{c+b}=\frac{c-b}{14},$$

amiből

(1) $$c-b=\frac{14}{4}=\frac{7}{2},$$

a feladat szerint

(2) $$c+b=14.$$

(1) és (2)-ből

$$c=\frac{35}{4}=8,75\text{cm}\qquad\text{és}\qquad b=\frac{21}{4}=5,25\text{cm},$$

és így

$$a=\sqrt{\frac{35^2-21^2}{16}}=\sqrt{\frac{56\cdot 14}{16}}=\sqrt{\frac{16\cdot 49}{16}}=7\text{cm}.$$

Gerencsér Piroska (Bp., VIII., Zrínyi Ilona lg. IV. o. t.)

II. megoldás: Felhasználhatjuk a

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

képletet is.

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}.$$

Tehát egy alkalmas λ arányossági tényezővel a háromszög oldalai ilyen alakúak:

$$a=4\lambda,\qquad b=3\lambda,\qquad\text{és}\qquad c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16\lambda^2+9\lambda^2}=5\lambda.$$

A feladat szerint

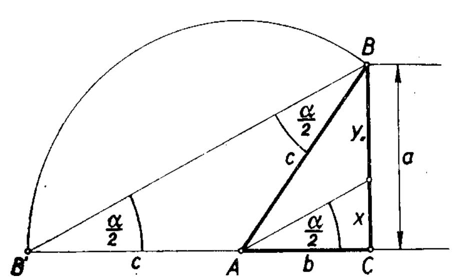
$$b+c=8\lambda=14,$$

amibő

$$\lambda=\frac{7}{4}.$$

Kovács István (Bp., VIII., Piarista g. IV. o. t.)

III. megoldás: Trigonometriai képletek nélkül is célhoz érhetünk. Az α szög felezője az a oldalt x és y részekre osztja. (Lásd ábrát.)



Ismeretes tétel alapján

(1) $$\frac{x}{y}=\frac{b}{c}.$$

Mivel a feladat szerint $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}=\frac{x}{b}$, azért $x=\frac{b}{2}$, és így (1) alapján

$$y=\frac{c}{2}.$$

Tehát
$$a = x + y = \frac{b+c}{2} = \frac{14}{2} = 7.$$

Pythagoras tétele szerint
$$7^2 + b^2 = (14-b)^2 = 196 - 28b + b^2,$$
ahonnan
$$28b = 147, \quad \text{és így} \quad b = \frac{147}{28} = \frac{21}{4} \text{ stb.}$$

Benkő Bálint (Sárospatak, Rákóczi g. III. o. t.)

IV. megoldás: Még a szögfelező–tételt is nélkülözhetjük. Forgassuk $AB = c$ átfogót A körül az $AC = b$ oldal meghosszabbításába: $AB' = c$. (Lásd ábrát.) Akkor nyilván
$$B'C = b + c = 14,$$
és a
$$BB'C\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}.$$

Tehát a $BB'C$ derékszögű háromszögből
$$a = (b+c)\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = 14 \cdot \frac{1}{2} = 7$$
stb., mint a III. megoldásban.

Rázga Tamás (Bp. II., Rákóczi g. III. o. t.)