I. megoldás: Az $\alpha \leq 90°$ feltételnek természetesen csak úgy van értelme, ha $\alpha > 0$ és $\beta > 0$.

A feltételi egyenletünk így is írható:

$$\sin\beta = \frac{3}{4}\sin\alpha = \frac{3}{4}2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}. \tag{1}$$

Mivel $0° < \alpha \leq 90°$, azért $0° < \frac{\alpha}{2} \leq 45°$. Ez utóbbi intervallumban $\cos\frac{\alpha}{2}$ legkisebb értéke $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ha tehát (1)-ben a $\cos\frac{\alpha}{2}$ helyett a nálánál sohasem nagyobb $\frac{\sqrt{2}}{2}$-t írjuk, akkor a jobboldalt csökkentettük, vagyis

$$\sin\beta \geq \frac{3\sqrt{2}}{4}\sin\frac{\alpha}{2} > \sin\frac{\alpha}{2}, \tag{2}$$

mert $\frac{3\sqrt{2}}{4} = \sqrt{\frac{9}{8}} > 1$.

Mivel $0°$ és $90°$ között a sinus–érték növekedésével együtt jár a szög növekedése is, azért (2) alapján $\sin\beta > \sin\frac{\alpha}{2}$ egyenlőtlenségből következik, hogy $\beta > \frac{\alpha}{2}$.

Megjegyzés: A (2) alatti egyenlőtlenség első részéből következik, hogy a $\beta > \frac{\alpha}{2}$ állítás, még az eredeti feltételnél kevesebbet kívánó $\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$ feltétel mellett is fennáll, és csak az $\alpha = 90°$ határon megy át egyenlőségbe.

Bártfai Pál (Bp. I., Petőfi g. IV. o. t.)

II. megoldás: A $\beta > \frac{\alpha}{2}$ (az első negyedben) állítás helyett vizsgáljuk meg a

$$\sin\beta = \frac{3}{4}\sin\alpha > \sin\frac{\alpha}{2}$$

állítást.

Keressük meg az

$$y_1 = \sin\beta = \frac{3}{4}\sin\alpha \qquad \text{és} \qquad y_2 = \sin\frac{\alpha}{2}$$

görbék közös pontjait, vagyis oldjuk meg az alábbi goniometriai egyenletet:

$$\frac{3}{4}\sin\alpha = \sin\frac{\alpha}{2}.$$

$\sin\frac{\alpha}{2}$ helyébe $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$-t írva és négyzetre emelve

$$\frac{9}{16}\sin^2\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{2},$$

vagyis

$$9(1-\cos^2\alpha) = 8 - 8\cos\alpha,$$

rendezve

$$9\cos^2\alpha - 8\cos\alpha - 1 = 0,$$

amiből

$$\cos\alpha_1 = 1 \qquad \text{és} \qquad \cos\alpha_2 = -\frac{1}{9},$$

és így

$$\alpha_1 = 0 \qquad \text{és} \qquad \alpha_2 > \frac{\pi}{2}.$$

Tehát a $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ intervallumban nincs gyök, és mivel az $\alpha = \frac{\pi}{2}$ helyen

$$y_1 = \frac{3}{4}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{3}{4} > \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = y_2,$$

azért az egész $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ intervallumban a $\sin\beta = \frac{3}{4}\sin\alpha$ görbe a $\sin\frac{\alpha}{2}$ görbe felett marad, amiből következik, hogy ebben az intervallumban

$$\beta > \frac{\alpha}{2}.$$

Cser László (Esztergom, I. István g. IV. o. t.)