I. megoldás: Az állítást elegendő a félátmérőkre bizonyítani, mert ha ezekre igaz, nyilván igaz kétszeresükre is.

Abban a speciális esetben, amikor a két, egymásra merőleges átmérő éppen a nagy- és a kistengely, a reciprok értékek négyzetösszege:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{b^2+a^2}{a^2b^2}.$$

Így tehát, ha a tétel igaz, az állandó szükségképpen

$$\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$$

Vegyük fel a koordináta–rendszer kezdőpontját a nagy- és kistengely metszéspontjában, az ellipszis tengelyei pedig illeszkedjenek a koordináta-rendszer tengelyeihez. Ez esetben, mint ismeretes, az a, b féltengelyű ellipszis egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Legyen az egyik félátmérő egyenesének egyenlete $y=mx$, akkor a reá merőleges másik félátmérő egyenesének egyenlete $y=-\dfrac{1}{m}x$. Behelyettesítéssel kiszámítva az ellipszis és a két átmérő egyenes egy–egy metszéspontjának (az átmérő egy-egy végpontjának) koordinátáit:

$$x_1^2=\frac{a^2b^2}{b^2+a^2m^2},\qquad y_1^2=\frac{a^2b^2m^2}{b^2+a^2m^2},$$
$$x_2^2=\frac{a^2b^2m^2}{a^2+b^2m^2},\qquad y_2^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2m^2},$$

akkor a két félátmérő hosszának négyzete

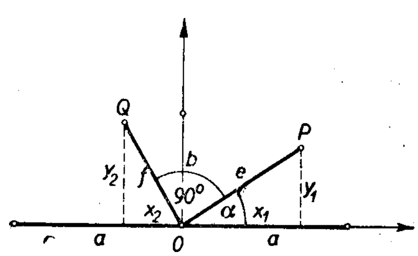
$$e^2=x_1^2+y_1^2=\frac{a^2b^2(m^2+1)}{a^2m^2+b^2},$$
$$f^2=x_2^2+y_2^2=\frac{a^2b^2(m^2+1)}{a^2+b^2m^2}.$$

Ebből pedig a reciprokok négyzetösszege :

$$\frac{1}{e^2}+\frac{1}{f^2}=\frac{(a^2+b^2)+(a^2+b^2)m^2}{a^2b^2(m^2+1)}=\frac{(a^2+b^2)(1+m^2)}{a^2b^2(m^2+1)}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$$

ami valóban független az m-től, vagyis minden egymásra merőleges átmérőpárra ugyanaz.

Gerencsér Piroska (Bp. VIII., Zrínyi Ilona lg. IV. o. t.)



II. megoldás: A betűzést az ábra mutatja. Fejezzük ki a félátmérők végpontjainak koordinátáit a félátmérők hosszával és a félátmérőknek az x tengellyel bezárt szögével.

A P pont koordinátái:

$$x_1=e\cos\alpha,\qquad y_1=e\sin\alpha,$$

a Q pont koordinátái:

$$x_2=f\cos(\alpha+90^\circ)=f\sin\alpha,$$
$$y_2=f\sin(\alpha+90^\circ)=f\cos\alpha.$$

Mivel P és Q az ellipszis pontjai, ezért e koordináták kielégítik annak egyenletét:

$$\frac{e^2\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{e^2\sin^2\alpha}{b^2}=1,\quad \text{és}\quad \frac{f^2\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{f^2\cos^2\alpha}{b^2}=1.$$

Ebből

$$\frac{1}{e^2}=\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2},\quad \text{és}\quad \frac{1}{f^2}=\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\alpha}{b^2}.$$

E két egyenlet összege

$$\frac{1}{e^2}+\frac{1}{f^2}=\frac{1}{a^2}(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+\frac{1}{b^2}(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2},$$

ami valóban állandó.

Daróczy Zoltán (Debrecen, Ref. g. III. o. t.)