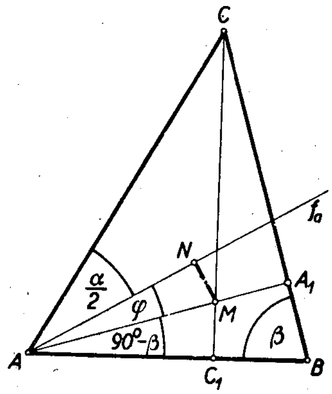
I. megoldás: A betűzést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Induljunk ki a

(1) $$2 \cdot MN = b - c$$

egyenletből. Ezt úgy kell átalakítanunk, hogy kiszámíthassuk belőle α-t, ami csak úgy sikerülhet, ha az átalakított egyenletből α kivételével a háromszög minden más alkotórésze kiküszöbölődik és α-ra egy tiszta goniometriai egyenlet marad. Célszerű lesz tehát arra törekedni, hogy az egyenlet mindkét oldalán egyetlen (mégpedig ugyanazon) hosszúság szerepeljen, ezenkívül pedig csak a háromszög szögei (ill. a szögek függvényei).

A baloldal átalakítása: Az AMN derékszögű háromszögből $MN = AM \sin\varphi$, ahol

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} - (90° - \beta) = \frac{\alpha + 2\beta - 180°}{2} = \frac{\alpha + 2\beta - (\alpha + \beta + \gamma)}{2} = \frac{\beta - \gamma}{2}.$$

Az AMC_1 derékszögű háromszögből

$$AM = \frac{AC_1}{\sin\beta},$$

az ACC_1 derékszögű háromszögből

$$AC_1 = b\cos\alpha.$$

Ezeknek az értékeknek visszahelyettesítése után (1) baloldala így alakul át

$$2 \cdot MN = \frac{b\cos\alpha}{\sin\beta} \cdot 2\sin\frac{\beta - \gamma}{2}.$$

A jobboldalt is átalakítjuk úgy, hogy csak a szögek és b szerepeljen benne. A sinus-tétel szerint $c = \dfrac{b\sin\gamma}{\sin\beta}$, tehát

$$b - c = b - \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta} = b\frac{\sin\beta - \sin\gamma}{\sin\beta}.$$

Felírva az átalakított (1) egyenletet és egyszerűsítve $\dfrac{b}{\sin\beta}$-val ($b \neq 0$, $\sin\beta \neq 0$)

$$\cos\alpha \cdot 2\sin\frac{\beta - \gamma}{2} = \sin\beta - \sin\gamma.$$

A baloldalt szorozzuk $\cos\dfrac{\beta + \gamma}{2}$-vel, a jobboldalt pedig a vele egyenlő $\sin\dfrac{\alpha}{2}$-vel

$$\cos\alpha\left(2\cos\frac{\beta + \gamma}{2}\sin\frac{\beta - \gamma}{2}\right) = (\sin\beta - \sin\gamma)\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Mint ismeretes, a baloldali zárójelbe foglalt szorzat azonosan egyenlő $(\sin\beta - \sin\gamma)$-val. Ha az értéke 0, akkor $\beta = \gamma$, tehát a háromszög egyenlő szárú, melyre (1) fennáll, de triviális. Ha $\sin\beta - \sin\gamma \neq 0$, akkor $(\sin\beta - \sin\gamma)$-val egyszerűsítve a

$$\cos\alpha = \sin\frac{\alpha}{2}$$

egyenletre jutunk. $\cos\alpha$ helyébe $1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$-t írva és rendezve

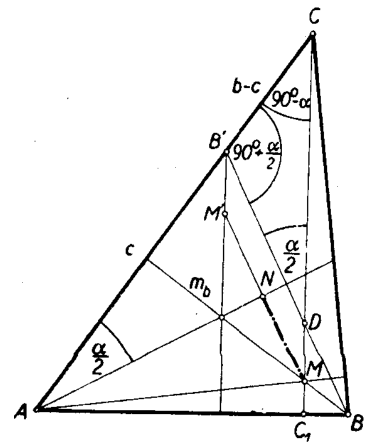
$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}-1=0,$$

amiből

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}.$$

A feladat szerint csak a pozitív gyöknek van értelme, tehát $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}$, ahonnan $\left(\dfrac{\alpha}{2}<90^\circ\ \text{ miatt}\right)$ csak $\alpha=60^\circ$ felel meg a feladat követelményeinek.

Biczó Géza (Bp. II. Rákóczi g. IV. o. t.)



2. ábra

II. megoldás: A betűzést a 2. ábra mutatja. Meg fogjuk kísérelni a

$$2\cdot MN=b-c \tag{1}$$

összefüggés felhasználásával α-t szögfüggvények nélkül, tisztán a szögek közötti összefüggések alapján, meghatározni. E célból az ábrát kiegészítjük.

Tükrözzük B-t és M-et f_a-ra, így nyerjük az ABB' egyenlőszárú háromszöget és az M' pontot. $AB'=c$ és $B'C=b-c$. Az egyenlőszárú háromszög B-ből kiinduló magassága és az eredeti háromszög m_b magassága azonos, az egyenlőszárú háromszög B'-ből kiinduló magassága tehát m_b-nek f_a-ra vonatkozó tükörképe és így átmegy az M' ponton.

Az eredeti háromszög m_c magasságvonala messe BB'-t a D pontban. A $DB'M'M$ idom paralelogramma (mert a szemközti oldalai párhuzamosak), ezért $MM'=DB'$.

A $B'DC$ háromszög B-nél fekvő szöge $90^\circ+\dfrac{\alpha}{2}$ $\Big($mert külső szöge egy olyan derékszögű háromszögnek, melynek másik hegyesszöge $\dfrac{\alpha}{2}\Big)$, a C-nél fekvő szöge az AC_1C derékszögű háromszögből $90^\circ-\alpha$, a D-nél fekvő szöge pedig, mint merőleges szárú szög, $\dfrac{\alpha}{2}$ $\left(90^\circ+\dfrac{\alpha}{2}+90^\circ-\alpha+\dfrac{\alpha}{2}=180^\circ\right)$

(1) akkor teljesül, ha $2MN=B'D=B'C$, vagyis $CB'D\triangle$ egyenlőszárú s így

$$\frac{\alpha}{2}=90^\circ-\alpha,\quad \text{amiből}\quad \alpha=60^\circ.$$

Szabados József (Bp. III., Árpád g. III. o. t.)

Általánosítások:

1. Ha tetszőleges, rögzített α szög szárán a C pont mozog, akkor változik a $B'C=b-c$ távolság és vele együtt változik az M és N pont is, de állandóan igaz marad, hogy $B'D\#MM'=2MN$ és a $B'DC\triangle$ csak nagyságra változik, de alakra nem (2. ábra). Ez utóbbi változó háromszögeknek (csak α-tól függő) szögei tehát állandóak, és így a $B'C$ és $B'D$ oldalak aránya

$$\frac{b-c}{2MN}=k,$$

ahol k konstans, amíg α is az.

A sinus–tétel alapján

$$\frac{b-c}{2MN}=\frac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sin(90^\circ-\alpha)},\quad \text{vagyis}$$

$$\frac{b-c}{MN}=\frac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}=k.$$

Ezzel általában bebizonyítottuk, hogy minden α szöghöz tartozik egy állandó $k=\dfrac{b-c}{MN}$ arányszám. $\Bigg($Jelen példában $k=2$, amiből következik, hogy $\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}=1$, vagyis $\alpha=60^\circ.\Bigg)$

Weiling Károly (Diósgyőr, Kilián Gy. g. IV. o. t.)

2. Feladatunk tulajdonképpeni általánosítása azonban a fenti általánosításnak megfordítása: adott pozitív k számhoz meghatározni az α szöget úgy, hogy $\dfrac{b-c}{MN}=k$. Tehát tulajdonképpen a

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{k}{2}\cos\alpha$$

goniometriai egyenlet megoldásáról van szó. Grafikus ábrázolással könnyen meggyőződhetünk, hogy α-ra mindig van egy és csakis egy megoldás a $\left(0,\,\dfrac{\pi}{2}\right)$ intervallumban, de az I. megoldásban mutatott út $\left(\cos\alpha=1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right)$ itt is követhető, és a $\sin\dfrac{\alpha}{2}$-re nyert másodfokú egyenletnek pozitív gyöke:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{1+2k^2}-1}{2k}.$$

Könnyű megmutatni, hogy ha $k>0$, akkor

$$0<\frac{\sqrt{2k^2+1}-1}{2k}<\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad \text{és így}\qquad 0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}.$$