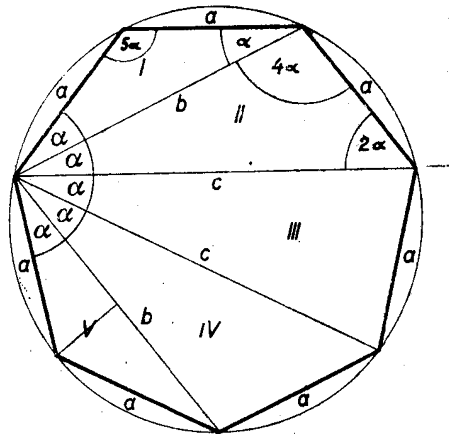
I. megoldás: Bontsuk fel a szabályos hétszöget egy csúcsból kiinduló 4 átlóval 5 háromszögre (1. ábra), akkor az átlók a szabályos hétszög szögét 5 egyenlő részre osztják.



1. ábra

Egy ilyen részt α-val jelölve

$$\alpha = \frac{1}{5} \cdot \frac{5 \cdot 180^\circ}{7} = \frac{180^\circ}{7}, \quad \text{vagyis} \quad 7\alpha = 180^\circ,$$

amiből következik, hogy

(1) $$\sin 2\alpha = \sin 5\alpha$$

és

(2) $$\sin 3\alpha = \sin 4\alpha.$$

A I és II háromszögekben a szögek nagyságát az 1. ábrán jelöltük. Alkalmazzuk e két háromszögre a sinus-tételt:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin 5\alpha} \quad \text{és} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin 4\alpha}.$$

E két egyenletet összeadva és a-val osztva

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin 5\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\sin 4\alpha}\right).$$

(1) és (2) figyelembevételével a zárójeles kifejezés

$$\frac{\sin\alpha(\sin 4\alpha + \sin 2\alpha)}{\sin 2\alpha \sin 4\alpha} = \frac{\sin\alpha \cdot 2\sin 3\alpha \cos\alpha}{\sin 2\alpha \sin 3\alpha} = 1$$

és ezzel tételünket bebizonyítottuk.

Bártfai Pál (Bp. I., Petőfi g. IV. o. t.)

II. megoldás: Az 1. ábrán az V egyenlőszárú háromszögben meghúzva a b alaphoz tartozó magasságot, leolvashatjuk, hogy

(1) $$\cos\alpha = \frac{b}{2\alpha}.$$

A IV és III háromszögek a oldalára alkalmazva a cosinus-tételt, $\cos\alpha$ helyett az (1) alatti értéket írva

(2) $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\frac{b}{2a} = b^2 + c^2 - \frac{b^2c}{a},$$

illetőleg

(3) $$a^2 = c^2 + c^2 - 2c^2\frac{b}{2a} = 2c^2 - \frac{bc^2}{a}.$$

Mivel (2) és (3)-ban a baloldalak egyenlők, azért a jobboldalak is azok, vagyis (a-val szorozva)

(4) $$ab^2 + ac^2 - b^2c = 2ac^2 - bc^2.$$

Rendezve

$$bc^2 - b^2c = ac^2 - ab^2,$$

vagyis

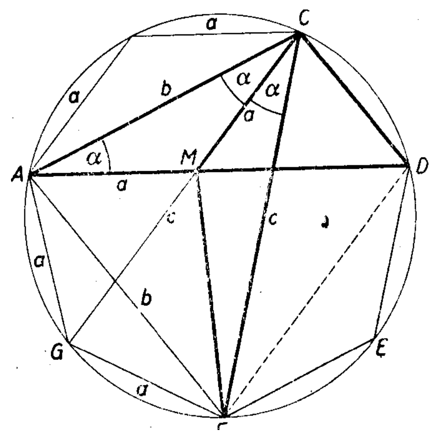
$$bc(c-b) = a(c^2 - b^2).$$

Midkét oldalt $abc(a-b)$-vel osztva ($c \neq b$)

$$\frac{1}{a} = \frac{c+b}{bc} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Tolnai Tibor (Szombathely, Nagy Lajos g. IV. o. t.)

III. megoldás: Az $ABCDEFG$ hétszögben jelöljük az AD és CG átlók metszéspontját M-mel (2. ábra).



2. ábra

Mivel $AD||BC$ és $CG||AB$, ezért $ABCM$ rombusz, és így $MC = a$.

Az $ACD\triangle$ területe

$$t_{ACD} = t_{ACM} + t_{MCD}.$$

Mivel $DF||CG$, azért

$$t_{MCD} = t_{MCF},$$

és így

$$t_{ACD} = t_{ACM} + t_{MCF},$$

vagyis

$$\frac{bc\sin\alpha}{2} = \frac{ab\sin\alpha}{2} + \frac{ac\sin\alpha}{2}.$$

Mindkét oldalt $\dfrac{2}{abc\sin\alpha}$-val szorozva

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b}.$$

Jeney Mária (Debrecen, Svetits lg. III. o. t.)

IV. megoldás: Még gyorsabban célhoz vezet a – trigonometriát nem is igénylő – Ptolemaios-tétel. Mint ismeretes, e tétel szerint a húrnégyszögben az átlók szorzata egyenlő a szemközti oldalpárok szorzatának összegével.

Az $ACFG$ (2. ábra) húrnégyszögre alkalmazva

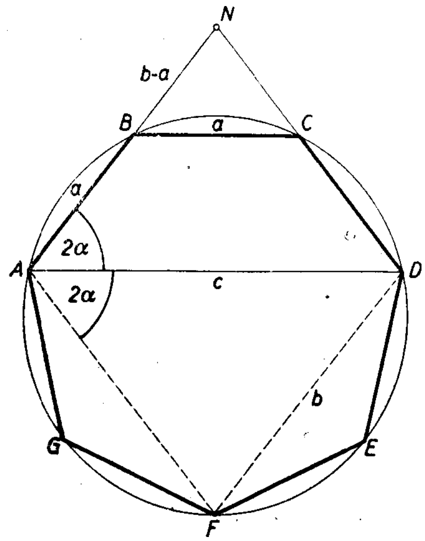
$$bc = ab + ac,$$

vagyis (abc-vel osztva)

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b}.$$

Holderith József (Bp. XIV., Vegyip. techn. IV. o t.)

V. megoldás: Még egyszerűbb eszközök: metszetek arányossága is elegendő tételünk bizonyításához.



3. ábra

Ha az AB és CD oldalak metszéspontját N-nel jelöljük (3. ábra), akkor $ANDF$ nyilván rombusz és így $NA = DF = b$. Mivel $BC||AD$, ezért

$$NB : BC = NA : AD,$$

vagyis

$$(b - a) : a = b : c,$$

amiből

$$bc - ac = ab, \qquad \text{azaz} \qquad bc = ac + ab.$$

Darvas Imre (Kaposvár, Táncsics g. IV. o. t.)