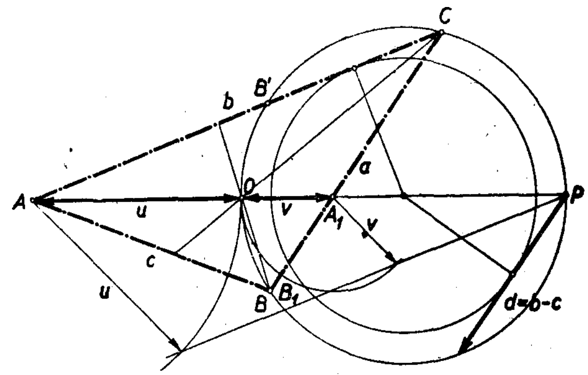


Képzeljük a feladatot megoldottnak (l. ábrát). Jelöljük az $f_a$ végpontját a $BC = a$ oldalon $A_1$-gyel. Legyen továbbá, $AO = u$, $OA_1 = v$, $(u + v = f_a)$ és $b - c = d$. A betűzést egyébként az ábra mutatja.

A szögfelezőre vonatkozó ismeretes tétel alapján, azt az $ABA_{1\Delta}$ $B$-ből induló és az $ACA_{1\Delta}$ $C$-ből induló szögfelezőjére alkalmazva,

$$BA : BA_1 = u : v = CA : CA_1$$

vagyis a $B$ és $C$ azon az Apollonius-féle körön vannak, amely kör pontjainak $A$-tól, ill. $A_1$-től való távolságának aránya $u : v$. E kör tehát átmegy az $O$ ponton és – mivel középpontja az $AA_1 = f_a$ egyenesen van – a $B$-nek az $f_a$-ra vonatkozó tükörképe $B'$ is a körön van, és így $B'C = b - c = d$ az Apollonius-kör húrja.

Eszerint a szerkesztés menete: Kiindulunk a megadott $AA_1 = f_a$ szakaszból és az ezen ($AO = u$ révén) megadott $O$ pontból. Megszerkesztjük az $f_a$ egyenesen a $P$ pontot úgy, hogy $PA : PA_1 = u : v$. $OP$ tehát az Apollonius-kör átmérője. E körben tetszőleges helyen megrajzolunk egy $b - c = d$ hosszúságú húrt és megszerkesztjük az Apollonius-körrel koncentrikus kört, amely ezt a húrt érinti.

$A$ pontból ez utóbbi körhöz szerkesztett érintő metszi ki az Apollonius-körből a $B'$ és $C$ pontokat. $CA_1$ összekötése metszi ki az Apollonius-körből a keresett háromszög harmadik csúcspontját, a $B$-t. Szerkesztésünk helyességét igazoltuk, ha bebizonyítjuk, hogy $AO$ a $BAC\sphericalangle$ felezője. Mivel $B$ és $C$ az Apollonius-körön vannak, azért $BO$ felezi az $ABA_1\sphericalangle = ABC\sphericalangle$-et, $CO$ pedig az $ACA_1\sphericalangle = ACB_\Delta$-et. Az $ABC_\Delta$ e két szögfelezőjének közös pontja $O$ és így $AO$ a harmadik szögfelező.

Állapítsuk meg a megoldhatóság feltételeit. Mindenekelőtt szükségképpen $u < f_a$. A beírt kör sugarát $\varrho$-val jelölve, $2\varrho < m_a$ miatt, $v < u$, vagyis $u + v = f_a < 2u$, tehát

(1) $$u < f_a < 2u.$$

Szükséges továbbá, hogy $b - c = d \leq 2r$, ahol $r$ az Apollonius-kör sugara.

Mivel, mint láttuk

$$PA : PA_1 = (2r + u) : (2r - v) = u : v,$$

amiből

$$2r = \frac{2\ uv}{u - v} = \frac{2u(f_a - u)}{2u - f_a},$$

azért a második feltétele a megoldhatóságnak, hogy

(2) $$b - c = d \leq \frac{2\ u(f_a - u)}{2\ u - f_a}$$

*Biczó Géza* (Bp. II., Rákóczi g. III. o. t.)

*Megjegyzés:* Meglehetősen hosszadalmas és komplikált megoldás: kiszámítani a beírt kör sugarát

$$\varrho^2 = v^2 - \left[\frac{d(u - v)}{2u}\right]^2,$$

majd azt megszerkeszteni. A megoldhatóság feltétele ($u > v$-n kívül) itt most, mint látható, az hogy $\frac{d(u - v)}{2u} \leq v$ legyen, vagyis $d \leq \frac{2uv}{u - v}$, ami egyezik az előbb nyert feltétellel.