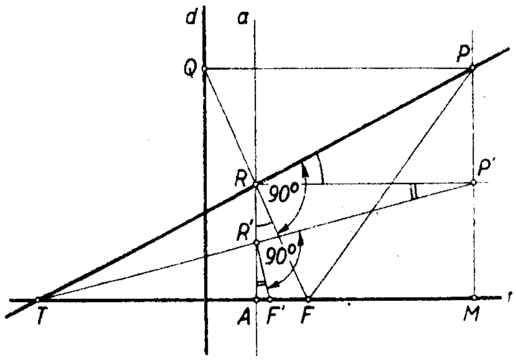
I. megoldás: Legyen az adott parabola tengelye t, fókusza F, direktrixe d, csúcspontja A és csúcsérintője a. A parabola tetszőleges pontja legyen P, ennek vetülete a direktrixen Q. Az FQ szakasz felezési pontja a csúcsérintőn fekvő R pont. PR magasságvonala az FPQ háromszögnek, amely a parabola definíciója szerint egyenlő szárú és a PR egyenes a parabola P pontbeli érintője. Látható, hogy Q és egyúttal P a tengelytől kétszer olyan távolságra van mint R; másrészt a parabola érintőjének a csúcsérintővel alkotott metszéspontjában az érintőre állított merőleges átmegy a fókuszon.

Ha a parabola minden pontját felényire közelítjük a tengelyhez, a tetszőleges P pont P'-be kerül és $PP' = RA$; megjegyezzük, hogy a közelítéssel A-nak megfelelő pont önmaga ($A' \equiv A$), és t a közelítéssel létrejött görbének is szimmetria-tengelye.



RA felezőpontját jelöljük R'-vel. Be fogjuk bizonyítani, hogy a $P'R'$ egyenesre R'-ben emelt merőleges a tengelyt oly F' pontban metszi, amely független a P (ill. P') helyzetétől. Ebből tüstént következik, hogy a P' pontok mértani helye olyan parabola, melynek csúcspontja A, fókusza F.

Az ábrán egyformán jelölt szögek, mint merőlegesszárúak, egyenlők, tehát
$RP'P\triangle \sim RAF\triangle$, ahonnan $P'R : P'P = AR : AF$, amiből (mivel $P'P = AR = 2AR'$)

$$AF = \frac{4AR'}{P'R}. \tag{1}$$

Hasonlóképpen

$$P'RR'\triangle \sim R'AF'\triangle, \quad \text{ahonnan} \quad P'R : RR' = AR' : AF',$$

és így (mivel $RR' = AR'$)

$$AF' = \frac{AR'^2}{P'R} \tag{2}$$

(1) és (2) összehasonlításából adódik, hogy

$$AF' = \frac{1}{4}AF,$$

ami egyben tételünk igazolását jelenti.

Katona Péter (Bp. VIII., Apáczai Csere g. III. o. t.)

II. megoldás: Jelöljük a P pont vetületét a t tengelyen M-mel, a PR érintőnek a t-vel való metszéspontját T-vel. $FR = RQ$ miatt $TR = RP$. A $P'T$ összekötő egyenes, $MP' = P'P$ miatt, átmegy az AR távolság R' felezőpontján.

A TRF és $TR'F'$ derékszögű háromszögekre alkalmazva az ismert középarányossági tételt

$$AR^2 = TA \cdot AF, \quad \text{ahonnan} \quad AF = \frac{AR^2}{TA} = \frac{(2AR')^2}{TA}$$
$$AR'^2 = TA \cdot AF', \quad \text{ahonnan} \quad AF' = \frac{AR'}{TA} = \frac{1}{4}AF.$$

Zsombok Zoltán (Bp. IV., Könyves Kálmán g. II. o. t.)