1. megoldás: Felírjuk egy tetszőleges $P(u,v)$ pontból a parabolához húzható érintők egyenletét, majd annak feltételét, hogy a két érintő $45°$-os szöget zárjon be egymással. Így a feltételt kielégítő pontok koordinátái között összefüggést nyerünk, ez a keresett mértani hely egyenlete.

A $P(u,v)$ ponton átmenő egyenes, melynek egyenlete

$$y-v=m(x-u) \tag{1}$$

alakú, ez esetben érinti az

$$y^2=2px \tag{2}$$

parabolát, ha a parabolával alkotott két metszéspontja egybeesik. Fejezzük ki (1)-ből x-et, és a nyert értéket írjuk be (2)-be, akkor rendezés után a következő egyenlethez jutunk:

$$my^2-2py+(2pv-2mpu)=0.$$

y-ra nézve egybeeső gyököket akkor kapunk, ha az egyenlet diszkriminánsa

$$4p^2-8mpv+8m^2pu=0,$$

azaz egyszerűsítve és rendezve

$$2um^2-2vm+p=0.$$

Ezt az egyenletet m-re megoldva nyerjük a $P(u,v)$ pontból a parabolához húzható két érintő iránytényezőjét.

$$m_1=\frac{v+\sqrt{v^2-2pu}}{2u} \quad \text{és} \quad m_2=\frac{v-\sqrt{v^2-2pu}}{2u} \tag{3}$$

Annak feltétele, hogy a két érintő $45°$-os szöget zárjon be egymással

$$\operatorname{tg}45°=1=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}, \quad \text{ebből} \quad 1+m_1m_2=m_1-m_2 \tag{4}$$

Ez utóbbi egyenletbe behelyettesítve m_1 és m_2-nek a (3) egyenletekből nyert értékét, megkapjuk a keresett mértani hely egyenletét:

$$1+\frac{v+\sqrt{v^2-2pu}}{2u}\cdot\frac{v-\sqrt{v-2pu}}{2u}=\frac{v+\sqrt{v^2-2pu}}{2u}-\frac{v-\sqrt{v^2-2pu}}{2u},$$

azaz összevonva

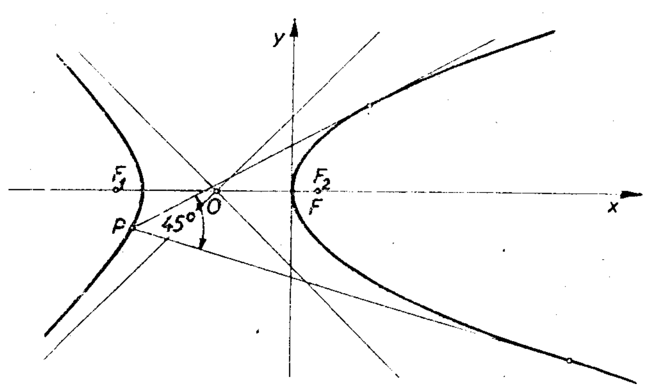
$$1+\frac{p}{2u}=\frac{\sqrt{v^2-2pu}}{u}.$$

Az egyenletet át fogjuk alakítani, hogy megállapíthassuk, milyen másodrendű görbe egyenlete és melyek e görbe jellemző adatai. Végigszorozzuk u-val, négyzetre emelünk, majd az u-t tartalmazó tagokat kiegészítjük teljes négyzetté

$$\left(u+\frac{3}{2}p\right)^2-v^2=2p^2, \quad \text{azaz} \quad \frac{\left(u+\frac{3}{2}p\right)^2}{2p^2}-\frac{v^2}{2p^2}=1.$$

Ez egyenlő oldatú hiperbola egyenlete. A hiperbola főtengelye egybeesik a parabola tengelyével, középpontja az $O\left(-\frac{3p}{2},0\right)$ és féltengelyeinek hossza

$a=b=p\sqrt{2}$. A lineáris excentricitás $c=\sqrt{a^2-b^2}=a\sqrt{2}=2p$, vagyis a hiperbola egyik fókusza $F_2\left(\frac{p}{2},0\right)$ egybeesik a parabola F fókuszával (1. ábrát).



A keresett mértani hely nem az egész hiperbola, hanem annak csak a parabolától távolabb eső ága. A másik ág pontjaiból a parabola 135°-os szög alatt látszik. Ugyanis az átalakításnál négyzetre emeltünk és ezáltal egybeolvasztottuk az

$$1=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2} \quad \text{egyenletet a} \quad -1=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

egyenlettel. Az utóbbi egyenlet viszont azt fejezi ki, hogy a két érintő egymással 135°-os szöget zár be.

Tarlacz László (Szombathely, Nagy Lajos g. III. o. t.)

II. megoldás: Legyen a $P(x,y)$ a keresett mértani hely egy pontja, akkor e pontból a parabolához húzható érintők 45°-os szöget zárnak be. Valamely $P(x_1,y_1)$ pontban a parabola érintőjének egyenlete

$$y_1y-p(x_1+x)=0.$$

Mivel az érintési pont a parabolán fekszik, azért $y_1^2-2px_1=0$, és így az érintő egyenlete így is írható

$$y_1^2-2yy_1+2px=0,$$

amely egyenletet y_1-re megoldva

$$y_1=\pm\sqrt{y^2-2px.}$$

Tehát a $P(x,y)$ pontból a parabolához húzható érintők érintési pontjainak ordinátái

$$y_1=y+\sqrt{y^2-2px}, \qquad y_2=y-\sqrt{y^2-2px}.$$

Az érintők iránytangensei

$$m_4=\frac{p}{y_1}, \quad \text{illetve} \quad m_2=\frac{p}{y_2},$$

tehát a két egyenes szögének tangensét kifejező képlet alapján nyerjük

$$1=\frac{py_1-py_2}{y_1y_2+p^2}=\frac{2\sqrt{y^2-2px}}{2x+p}.$$

Innen a keresett mértani hely egyenlete

$$4x^2-4y^2+12px+p^2=0$$

Ez azonban így is írható:

$$\left(x+\frac{3p}{2}\right)^2-y^2-2p^2=0,$$

ami egyezik az első megoldásban nyert eredménnyel.

Bártfai Pál (Bp. I. Petőfi g. III. o. t.)