I. megoldás:

a)

$$\binom{2a}{a}=\frac{2a(2a-1)\dots(a+1)}{1\cdot 2\dots a}=\frac{2a}{a}\cdot\frac{(2a-1)\dots(a+1)}{1\cdot 2\dots(a-1)}=2\binom{2a-1}{a-1}$$

Ezzel tételünk első része nyilvánvalóvá vált.

b) a és $a+1$ relatív prímek, azért ha $a\binom{2a}{a}$ osztható $(a+1)$-gyel, akkor $\binom{2a}{a}$ is osztható vele, de

$$a\binom{2a}{a}=a\frac{2a(2a-1)\dots(a+2)(a+1)}{1\cdot 2\dots(a-1)}=(a+1)\frac{2a(2a-1)\dots(a+2)}{1\cdot 2\dots a-1}=$$
$$=(a+1)\binom{2a}{a-1}.$$

c)

$$\binom{2a}{a}=\frac{2a(2a-1)\dots(a+2)(a+1)}{1\cdot 2\dots(a-1)a}=$$
$$=\frac{2(2a-1)}{a}\cdot\frac{(2a-2)\dots(a+1)a}{1\cdot 2\dots(a-1)}=\frac{(2a-1)}{a}\binom{2a-2}{a-1}.$$

De az előbb bebizonyított tétel alapján $\binom{2a-2}{a-1}:a$ egész szám, és így $\binom{2a}{a}$ osztható $(2a-1)$-gyel.

II. megoldás: $\binom{2a}{a}=C_{2a}^{a}$, vagyis $\binom{2a}{a}$ jelenti a $2a$ elemből kiválasztható a elemű csoportok számát. A kiválasztás módja sokféle lehet.

a) Valahányszor egy a elemű csoportot kiválasztunk, visszamarad egy a elemű csoport. Ilyen módon az összes lehetséges a elemű csoportokat párosával kapjuk, számuk tehát 2-vel osztható.

b) $2a$ elemből kiválasztható $\binom{2a}{a}$ számú a elemű csoport mindegyikében jelöljünk meg egy tetszőleges elemet. Ilyen módon mindegyik csoportból a számú új csoportot készíthetünk. Összesen tehát lesz $a\binom{2a}{a}$ csoportunk.

De az összes ilyen csoportokhoz, mégpedig mindegyikhez csak egyszer, a következőképpen is juthatunk. Először a $2a$ elemből kiválasztjuk az összes lehetséges $(a-1)$ elemű csoportot. Ezeknek száma $\binom{2a}{a-1}$; azután mindegyik csoportból $(a+1)$ számú új csoportot alkotunk azáltal, hogy megjelölve hozzáírunk mindegyik csoporthoz egy-egy elemet az illető csoportban elő nem forduló $(a+1)$ számú elem közül. Így összesen $(a+1)\binom{2a}{a-1}$ csoportot nyerünk.

Tehát

$$a\binom{2a}{a}=(a+1)\binom{2a}{a-1}$$

és mivel a és $a+1$ relatív prím, $\binom{2a}{a}$ osztható $(a+1)$-gyel.

c) A $\binom{2a}{a}$ számú a elemű csoport mindegyikében jelöljünk meg két elemet különböző jellel.

Az első jelölés történhetik a-féléképpen, a második jelölés $(a-1)$-féleképpen, tehát mindegyik csoportból $a(a-1)$ számú új csoportot kapunk, és így lesz összesen $a(a-1)\binom{2a}{a}$ számú csoport, 2–2 különböző jellel megjelölt elemmel.

E kettős jelölésű csoportok előállítása azonban a következőképpen is történhetik:

A $2a$ elem egy elemét megjelöljük az első jellel. A többi $(2a-1)$ élem egyikét a másik jellel. E jelölések $2a(2a-1)$-féleképpen történhetnek. Végül a két megjelölt elemhez hozzácsatolunk a jelöletlen $(2a-2)$ elemből minden lehetséges módon kiválasztott $(a-2)$ elemet. Utóbbi kiválasztás $\binom{2a-2}{a-2}$-féleképpen történhetik. Ilyen módon is eljutunk az összes kettős jelölésű csoporthoz és mindegyikhez csak egyszer, tehát az így nyert csoportok száma megegyezik az első módon nyert csoportok számával, vagyis

$$a(a-1)\binom{2a}{a}=2a(2a-1)\binom{2a-2}{a-2},$$

azaz

$$(a-1)\binom{2a}{a}=2(2a-1)\binom{2a-2}{a-2}.$$

Mivel $(a-1)$ és $(2a-1)$ egymáshoz relatív prim számok, azért $\binom{2a}{a}$ osztható $(2a-1)$-gyel.

Zawadowski Alfréd (Bp. 1., Petőfi g. 1V. o. t.)

Megjegyzés: Látható, hogy az itt követett gondolatmenet az I. megoldásával teljesen párhuzamosan halad, azzal az eltéréssel, hogy a felhasznált oszthatósági viszonyokra algebrai átalakítások helyett kombinatorikus meggondolásokból következtet.