

I. megoldás: A sorozat különbségét $2d$ -vel jelölve, az egyenlet gyökei a következő alakban írhatók:

$$x_1 = a - 3d, \quad x_2 = a - d, \quad x_3 = a + d, \quad x_4 = a + 3d.$$

A gyökök és együtthatók közti összefüggés alapján a harmadfokú tag együtthatója

$$(1) \quad -(x_1 - x_2 + x_3 + x_4) = -4a = 4,$$

a másodfokú tag együtthatója

$$(2) \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 6a^2 - 10d^2 = -34$$

(1) és (2)-ből $a = -1$. $d = \pm 2$, és így a gyökök: $-7, -3, 1, 5$.

Ismét a gyökök és együtthatók közötti összefüggések alapján

$$C = -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) = -(21 + 105 - 35 - 15) = -76,$$

és

$$D = x_1x_2x_3x_4 = 105.$$

Csernyák László (Kaposvár, Tánicsics g. IV. o. t.)

II. megoldás: Az $x = y + k$ helyettesítéssel küszöböljük ki a harmadfokú tagot. Az $(y + k)^4 + 4(y + k)^3 + \dots$ kifejezésben az y^3 együtthatója a $4(k + 1)$, amely tehát akkor 0, ha $k = -1$.

Egyenletünkben az $x = y - 1$ helyettesítést végrehajtva, nyerjük

$$(1) \quad \begin{aligned} (y - 1)^4 + 4(y - 1)^3 - 34(y - 1)^2 + C(y - 1) + D = y^4 - 40y^2 + (76 - C)y + \\ + (D - C - 37) = 0 \end{aligned}$$

Ennek az egyenletnek a gyökei is számtani sorozatot alkotnak, de mivel a harmadfokú tag együtthatója 0, azért szükségképpen a 4 gyök összege is 0, vagyis a négy gyök a 0 pontra nézve szimmetrikusan helyezkedik el.

Tehát

$$y_1 = -3u, \quad y_2 = -u, \quad y_3 = u, \quad y_4 = 3u.$$

A gyöktényezőzős előállítás

$$(2) \quad (y^2 - 9u^2)(y^2 - u^2) = y^4 - 10u^2y^2 + 9u^4 = 0$$

Tehát (1) és (2) összehasonlításából

- 1.) $-10u^2 = -40$, vagyis $u^2 = 4$,
- 2.) $76 + C = 0$, ahonnan $C = -76$
- 3.) $D - C - 37 = 9u^4$,

amiből

$$D = 9u^4 + C + 37 = 9 \cdot 4^2 - 76 + 37 = 105.$$

Vigassy József (Bp. I., Petőfi g. IV. o. t.)