I. megoldás: Ismeretes, hogy az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszisnek az (x_1, y_1) pontjában húzott érintő egyenlete

$$\frac{x_1 x}{a^3}+\frac{y_1 y}{b^2}=1.$$

Példákban $a=3$, $b=2$ és így az érintő egyenlete

$$\text{(e)} \qquad \frac{x_1}{9}x+\frac{y_1}{4}y=1.$$

Az érintési pont ismeretlen x_1, y_1 koordinátáinak kiszámítására két egyenletet szolgáltat annak felhasználása, hogy egyrészt az adott P pont illeszkedik az érintőhöz, másrészt az érintési pont illeszkedik az ellipszishez. Tehát

$$\text{(1)} \qquad \frac{3}{5\cdot 9}x_1+\frac{14}{5\cdot 4}y_1=1,$$

és

$$\text{(2)} \qquad 4x_1^2+9y_1^2=36$$

(1)-ből $y_1=\frac{30-2x_1}{21}$, mely értéket (2)-be behelyettesítve nyerjük

$$\text{(3)} \qquad 25x_1^2-15x_1-108=0,$$

ahonnan

$$x_1'=\frac{12}{5} \qquad \text{és} \qquad x_1''=-\frac{9}{5},$$

és igy

$$y_1'=\frac{6}{5} \qquad \text{és} \qquad y_1''=\frac{8}{5},$$

A nyert értékpárokat (e)-be helyettesítve

$$8x+9y=30,$$

illetőleg

$$x-2y=-5$$

a keresett két érintő egyenlete.

Grätzer György (Bp. VI., Kölcsey g. IV. o. t.)

II. megoldás: Legyen a keresett érintő egyenlete

$$y=mx+b.$$

Az érintő és az ellipszis közös pontjainak koordinátáit megkapjuk, ha y fenti értékét az ellipszis egyenletébe helyettesítjük:

$$4x^2+9(mx+b^2)=36,$$

vagyis rendezve

$$\text{(1)} \qquad (4+9m^2)x^2+18mbx+(9b^2-36)=0.$$

Érintés esetén a metszéspontok egybeesnek, vagyis az (1) alatti másodfokú egyenlet diszkriminánsa 0.
Tehát

$$(18mb)^2-4(4+9m^2)(9b^2-36)=0,$$

vagyis tagokra bontva és 144-gyel egyszerűsítve

$$\text{(2)} \qquad 9m^2-b^2+4=0.$$

Az $y=mx+b$ érintő áthalad a P ponton, tehát $\frac{14}{5}=m\frac{3}{5}+b$, vagyis

$$\text{(3)} \qquad 3m+5b=14.$$

(2) és (3)-ból

$$9m^2=(14-5b)^2=b^2-4,$$

rendezés és egyszerűsítés után

$$6b^2-35b+50=0,$$

amiből

$$b_1 = \frac{10}{3}, \qquad b_2 = \frac{5}{2},$$

és így

$$m_1 = -\frac{8}{9}, \qquad m_2 = \frac{1}{2},$$

A keresett érintők egyenlete tehát

$$y = -\frac{8}{9}x + \frac{10}{3} \qquad \text{és} \qquad y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

Plichta Jenő (Mezőkövesd, I. László g. IV. o. t.)