I. megoldás: Az, hogy az $y=ax^4+bx^3+1$ görbe az $x=1$ helyen érinti az abszcissza tengelyt, azt jelenti, hogy az

$$ax^4+bx^3+1=0$$

egyenletnek az $x=1$ legalább kétszeres gyöke, vagyis az egyenlet többtagúja $(x-1)^2$-tel maradék nélkül osztható.

Az osztást elvégezve hányadosul $ax^2+(2a+b)x+(3a+2b)$-t kapunk, a maradék pedig

$$(4a+3b)x-(3a+3b-1).$$

Tehát kell, hogy

$$4a+3b=0, \quad \text{és} \quad 3a+2b-1=0,$$

mely egyenletrendszerből $a=3$, $b=-4$.

Tehát a kirovásnak eleget tevő függvény

$$y=3x^4-4x^3+1.$$

Kovács László (Debrecen, Ref. g. IV. o. t.)

II. megoldás: Az $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$,
illetve

$$x^4+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}x+\frac{e}{a}=0 \tag{1}$$

egyenlet gyökei legyenek x_1, x_2, x_3 és x_4. Az egyenlet gyöktényezős alakja tehát

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)=0 \tag{2}$$

(1) és (2) megfelelő együtthatói egyenlők, vagyis

$$x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{b}{a},$$
$$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=\frac{c}{a},$$
$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-\frac{d}{a},$$
$$x_1x_2x_3x_4=\frac{e}{a}.$$

Jelen esetben $c=d=0$, $e=1$, $x_1=x_2=1$,
és így

$$2+x_3+x_4=-\frac{b}{a}$$
$$1+2(x_3+x_4)+x_3x_4=0$$
$$x_3+x_4+2x_3x_4=0$$
$$x_3x_4=\frac{1}{a}$$

amely egyenletrendszerből $a=3$, $b=-4$

Quittner Pál (Bp. I., Petőfi g. III. o. t.)

III. megoldás: Az előbbiek alapján az ax^4+bx^3+1 negyedfokú polinom felbontható két másodfokú polinom szorzatára, amelyből az egyik $(x-1)^2=x^2-2x+1$, a másiknak pedig az első és harmadik együtthatója a ill. 1, és így ax^2+cx+1 alakú. Tehát az a, b és c együtthatókat kell úgy meghatározni, hogy fennálljon a következő azonosság:

$$(x^2-2x+1)(ax^2+cx+1)=ax^4+bx^3+1.$$

Ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy az egyenlő hatványok együtthatói egyenlők legyenek.

A baloldalt polinommá alakítva

$$ax^4+(c-2a)x^3+(a-2c+1)x^2+(c-2)x+1=ax^4=bx^3+1,$$

tehát

$$c-2a=b, \quad a-2c+1=0, \quad c-2=0,$$

ahonnan

$$c=2, \quad a=2c-1=3, \quad b=2-6=-4.$$

Zsombok Zoltán (Bp. IV., Könyves Kálmán g. II. o. t.)

IV. megoldás: A magasabbrendű érintést figyelmen kívül hagyva, a feladat szerint az $y=ax^4+bx^3+1$ függvénynek az $x=1$ helyen szélső értéke van, mely 0-val egyenlő:

$$a+b+1=0, \quad b=-a-1.$$

Ekkor az $y=ax^4+bx^3=x^3(ax+b)=x^3(ax-a-1)$ függvénynek is szélsőértéke van az $x=1$ helyen, és így az ebből $\left(-\dfrac{a^3}{27}\right)$ állandóval való szorzás által nyert

$$y-\frac{ax}{3}\cdot\frac{ax}{3}\cdot\frac{ax}{3}(1+a-ax)$$

függvénynek is.

Itt a jobboldal tényezői az $x=1$ hely közelében pozitívak, ha $a>0$, és összegük állandó: $(a+1)$, tehát szorzatuknak akkor van szélsőértéke,[1] ha a tényezők egyenlők, azaz, ha

$$\frac{ax}{3}=1+a-ax.$$

Mivel a szélső érték az $x=1$ helyen van,
$\dfrac{a}{3}=1, \quad$ vagyis $\quad a=3, \quad$ és így $\quad b=-a-1=-4.$

Csiszár Imre (Bp. I., Petőfi g. II. o. t.)

---

[1] Ugyanis a számtani és mértani közép egyenlőtlensége szerint, ha s, t, u, v pozitív $\sqrt[4]{stuv}=\sqrt{\sqrt{st}\sqrt{uv}}\leqq\dfrac{\sqrt{st}+\sqrt{uv}}{2}\leqq\dfrac{\frac{s+t}{2}+\frac{u+v}{2}}{2}=\dfrac{s+t+u+v}{4}$ és egyenlőség csak $s=t=u=v$ esetében állhat fenn.