Mivel a feltétel szerint $a^2<1$, azért $2a^2<1+a^2$, és így $\frac{2a^2}{1+a^2}<1$, vagyis a jobboldalon álló tört nevezője pozitív. E pozitív nevezővel egyenlőtlenségünk mindkét oldalát megszorozva,

$$a\left(1-\sqrt{\frac{2a}{1+a^2}}\sqrt{a}\right)<\sqrt{\frac{2a}{1+a^2}}-\sqrt{a}.$$

Rendezve

$$\sqrt{a}+a<\sqrt{\frac{2a}{1+a^2}}(1+a\sqrt{a}). \tag{1}$$

De

$$1+a\sqrt{a}=1+\sqrt{a}-\sqrt{a}-a+a+a\sqrt{a}=(1+\sqrt{a})-\sqrt{a}(1+\sqrt{a})+$$
$$+a(1+\sqrt{a})=(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a}+a),$$

és így (1) így írható:

$$\sqrt{a}(1+\sqrt{a})<\sqrt{\frac{2a}{1+a^2}}(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a}+a).$$

A pozitív $(1+\sqrt{a})$-val mindkét oldalt osztva:

$$\sqrt{a}<\sqrt{\frac{2a}{1+a^2}}(1-\sqrt{a}+a).$$

Mivel $1-\sqrt{a}>0$, azért mindkét oldal pozitív és így négyzetre emelhetjük:

$$a<\frac{2a}{1+a^2}(1-2\sqrt{a}+a+2a-2a\sqrt{a}+a^2).$$

Szorozzuk mindkét oldalt a pozitív $\frac{1+a^2}{1}$-val

$$1+a^2<2-4\sqrt{a}+6a-4a\sqrt{a}+2a^2,$$

vagyis

$$0<1-4\sqrt{a}+6a-4a\sqrt{a}+a^2=(1-\sqrt{a})^4.$$

Legutóbbi egyenlőtlenségünk nyilván igaz, de ebből következik, hogy az előbbi egyenlőtlenségek is rendre egymás után helyesek, mert minden egyes esetben megfordítható átalakítást végeztünk.

Rozsondai Zoltán (Bp., VIII., Apáczai Csere g. IV. o. t.)