I. megoldás: Nyilvánvaló, hogy a két mozgás egy és ugyanazon függőleges síkban történik. Ha e síkban x tengelynek vesszük a ferdén hajított test vetületét a vízszintes síkon, kezdőpontnak a A pontot, akkor a fizikából ismeretes, hogy a közös elhajítási időponttól számított t másodperc múlva az első test koordinátái

$$x_1 = ct\cos\alpha, \qquad y_1 = ct\sin\alpha - \frac{g}{2}t^2,$$

a második test koordinátái pedig

$$x_2 = a \qquad y_2 = ct - \frac{g}{2}t^2,$$

és így a két test távolságának négyzete

$$\begin{aligned} d^2 &= (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 = (ct\cos\alpha - a)^2 + (ct\sin\alpha - ct)^2 = \\ &= c^2t^2\cos^2\alpha - 2act\cos\alpha + a^2 + c^2t^2\sin^2\alpha - 2c^2t^2\sin\alpha + c^2t^2 = \\ &= 2c^2t^2(1-\sin\alpha) - 2act\cos\alpha + a^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Ez t-re nézve másodfokú függvény, melynek – mivel t^2 együtthatója $2c^2(1-\sin\alpha)>0$ – minimuma van a

$$t_0 = -\frac{-2ac\cos\alpha}{2\cdot 2c^2(1-\sin\alpha)} = \frac{a\cos\alpha}{2c(1-\sin\alpha)}$$

helyen.

A d^2 minimális értékét megkapjuk, ha a t_0 értékét behelyettesítjük az (1) alatti függvénybe:

$$\begin{aligned} d^2_{\min} &= \frac{a^2\cos^2\alpha}{2(1-\sin\alpha)} - \frac{a^2\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha} + a^2 = a^2 - \frac{a^2\cos^2\alpha}{2(1-\sin\alpha)} = \\ &= a^2\left(1-\frac{1-\sin^2\alpha}{2(1-\sin\alpha)}\right) = a^2\left(1-\frac{1+\sin\alpha}{2}\right) = a^2\frac{1-\sin\alpha}{2}, \end{aligned}$$

vagyis

$$d_{\min} = a\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}.$$

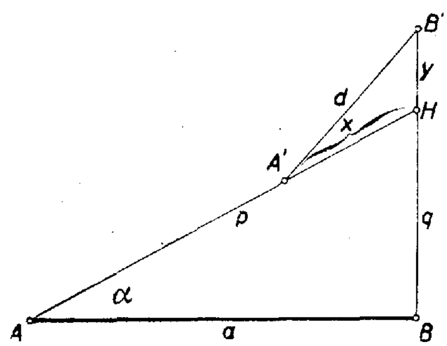
Figyeljük meg, amíg a t_0 értéke még függ a c közös kezdősebességtől, a $d_{\min}$ már c-től független.

Az adott értékekkel

$$d_{\min} = 50\sqrt{3}\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}} = 25\sqrt{3}\ \text{m}.$$

Plichta Jenő (Mezőkövesd, I. László g. IV. o. t.)

II. megoldás: A nehézségi erő mindkét testnek egyenlő függőleges irányú gyorsulást ad, és ezáltal egyenlő függőleges irányú eltolódást okoz, ami viszont a két testnek egymástól való távolságát nem befolyásolja, és így feladatunknál a nehézségi erőtől eltekinthetünk. Tehát az ABH derékszögű háromszög (lásd ábrát) $AH=p$ átfogóján és $BH=q$ befogóján egyaránt c sebességgel haladó testek távolságának minimumát vizsgáljuk. A mozgás kiindulása A és B-ből egyidejű. t idő múlva az átfogón mozgó test A'-be, a befogón mozgó test B'-be ér. $AA'=BB'=ct$.



Tekintsük változónak az

$$x = p - ct, \qquad y = ct - q$$

mennyiségeket. Ez esetben $x+y=p-q$ állandó.

Nyilvánvaló, hogy amíg $x>0$, és $y<0$, addig t növekedésével az $A'B'=d$ távolság fogy, és $x<0$, $y>0$ esetén pedig t növekedésével d is növekszik (mégpedig minden határon túl), tehát minimum csak $x>0$, $y>0$ esetén lehet.

Ez esetben a cosinustétel értelmében

$$
\begin{aligned}
d^2 &= x^2+y^2-2xy\cos(90^\circ+\alpha) = x^2+2xy+y^2-2xy+2xy\sin\alpha = \\
&= (x+y)^2-2xy(1-\sin\alpha).
\end{aligned} \tag{1}
$$

Mivel $x+y$ állandó, azért d^2 akkor lesz minimális (figyelembe véve, hogy $1-\sin\alpha>0$), ha xy maximális. Ha két mennyiség összege állandó, a mértani közép akkor maximális, ha a két mennyiség egyenlő. Tehát xy akkor maximális, ha $x=y$, vagyis $x+y=2x=p-q$, azaz $x=y=\dfrac{p-q}{2}$.

Most kiszámíthatjuk a t_0 értékét, annak alapján, hogy $p-ct_0=ct_0-q$ vagyis $t_0=\dfrac{p+q}{2c}$, de inkább megmutatjuk, hogy az I. megoldástól eltérően t_0 kiszámítása nélkül is meghatározhatjuk $d_{\min}$ értékét.

Ugyanis (1) alapján

$$
\begin{aligned}
d_{\min}^2 &= (p-q)^2-\frac{(p-q)^2}{2}(1-\sin\alpha) = \frac{(p-q)^2}{2}+\frac{(p-q)^2}{2}\sin\alpha = \\
&= \frac{(p-q)^2}{2}(1+\sin\alpha).
\end{aligned} \tag{2}
$$

Mivel $p=\dfrac{a}{\cos\alpha}$ és $q=a\operatorname{tg}\alpha$, azért

$$
p-q=\frac{a}{\cos\alpha}-\frac{a\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{a(1-\sin\alpha)}{\cos\alpha}
$$

és így (2) alapján

$$
d_{\min}^2=\frac{a^2(1-\sin\alpha)^2}{2\cos^2\alpha}(1+\sin\alpha)=\frac{a^2(1-\sin^2\alpha)(1-\sin\alpha)}{2\cos^2\alpha}=\frac{a^2(1-\sin\alpha)}{2},
$$

ahonnan

$$
d_{\min}=a\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}.
$$

Bártfai Pál (Bp., I., Petőfi g. III. o. t.)