I. megoldás: Kiszámítjuk a háromszög szögeinek cosinusát, majd kifejezzük rendre a köréírt kör középpontjának az egyes oldalaktól mért távolságát kétféleképpen. Így három egyenlethez jutunk, melyekből a köréírt kör középpontjának két koordinátája és a kör sugara kiszámítható.

Legyenek a háromszög szögei ω_1, ω_2, ω_3. Tangenseiknek abszolút értékét az $m_1=\frac{1}{3}$, $m_2=7$, $m_3=-\frac{1}{2}$ iránytényezőkből nyerjük:

$$|\operatorname{tg}\omega_1|=\left|\frac{m_2-m_3}{1+m_1m_2}\right|=\frac{7+\frac{1}{2}}{1-\frac{7}{2}}=3,\ \text{hasonlóan } |\operatorname{tg}\omega_2|=1,\ |\operatorname{tg}\omega_3|=2.$$

Mivel mind a három tangens abszolút értéke legalább 1, azért a háromszög hegyesszögű és így mindhárom szög cosinusa pozitív.

$\cos\omega=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\omega}}$ alapján

$$\cos\omega_1=\frac{1}{\sqrt{10}},\quad \cos\omega_2=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos\omega_3=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

A köréírt kör középpontjának távolsága a háromszög oldalaitól:

$$(1)\qquad d_1=r\cos\omega_1=\frac{r}{\sqrt{10}},\quad d_2=\frac{r}{\sqrt{2}},\quad d_3=\frac{r}{\sqrt{5}}.$$

Jelöljük a középpont koordinátáit x_0 és y_0-val. A kör középpontjának az oldalaktól mért távolsága

$$(2)\qquad d_1=\frac{x_0-3y_0-2}{\sqrt{10}},\quad d_2=\frac{y_0-7x_0+34}{5\sqrt{2}},\quad d_3=\frac{x_0+2y_0+8}{\sqrt{5}}.$$

Az (1) és (2) egyenletek összehasonlítása alapján

$$r=x_0-3y_0-2,\quad 5r=y_0-7x+34,\quad r=x_0+2y_0+8.$$

Megoldva a nyert egyenletrendszert

$$x_0=1,\quad y_0=-2,\quad r=5,$$

tehát a háromszög köré írt kör egyenlete:

$$(x-1)^2+(y+2)^2=25.$$

Bártfai Pál (Bp., I., Petőfi g. III. o. t.)

II. megoldás: Jelöljük a három egyenes egyenletét $L_1=0$, $L_2=0$, $L_3=0$-val.

Képezzük a következő kifejezést:

$$K=L_1L_2+\lambda L_2L_3+\mu L_3L_1,$$

ahol λ és μ tetszőleges valós értéket jelent.

A felírt kifejezés másodfokú (két-két elsőfokú kifejezés szorzatának összege). Tetszőlegesen választott λ és μ mellett $K=0$ egy kúpszelet egyenlete. λ és μ különböző értékei mellett K más és más kúpszeletet jelent.

A $K=0$ egyenlettel jellemzett összes másodrendű görbe átmegy az adott egyenesek metszéspontjain. Ugyanis pl. az $L_1=0$ és $L_2=0$ egyenesek metszéspontjainak koordinátáit behelyettesítve, bármekkorának is választjuk λ-t és μ-t, a K kifejezésnek nemcsak az első tagja lesz 0, hanem a második tag is (mert $L_2=0$) és a harmadik is (mert $L_1=0$). Feladatunk λ-t, s μ-t úgy megválasztani, hogy $K=0$ éppen kör egyenlete legyen. Ennek a feltétele, hogy x^2 és y^2-es tag együtthatója egyenlő legyen, továbbá, hogy az xy-os tag együtthatója 0 legyen.

Írjuk ki a K-t részletesen.

$$K=(x-3y-2)(7x-y+34)+\lambda(7x-y-34)(x+2y+8)+$$
$$+\mu(x+2y+8)(x-3y-2)=0.$$

Rendezve

$$(7+7\lambda+\mu)x^2+(-22+13\lambda-\mu)xy+(3-2\lambda-6\mu)y^2+$$
$$+(-48+22\lambda+6\mu)x+(104-76\lambda-28\mu)y+(68-272\lambda-16\mu)=0.$$

Feltételünk szerint:

$$7+7\lambda+\mu=3-2\lambda-6\mu,$$
$$-22+13\lambda-\mu=0,$$

mely egyenletekből

$$\lambda = \frac{3}{2}, \qquad \mu = -\frac{5}{2}.$$

A nyert értékeket K-ba helyettesítve, átrendezés után a

$$15x^2 + 15y^2 - 30x + 60y - 300 = 0$$

egyenlethez jutunk. 15-tel egyszerűsítve

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25.$$

Előfordulhat, hogy a paraméterek meghatározására szolgáló egyenletek nem függetlenek egymástól, így nem alkalmasak λ és μ kiszámítására. Ez akkor következik be, ha az adott egyenesek közül kettő párhuzamos, mely esetben feladatunknak nincs megoldása. (Ilyenkor a háromszög egyik csúcspontja a végtelenben van és a körülírt kör elfajul egy végesben fekvő egyenessé (háromszögoldal) és a sík végtelenben fekvő egyenesévé.)

Bauer Károly (Pécs, Bányaip. techn. IV. o. t.)