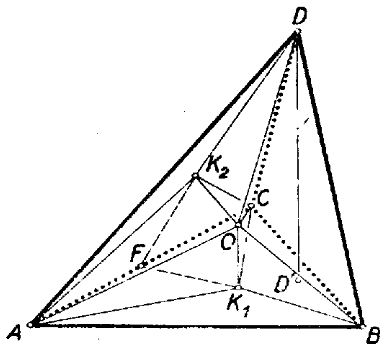
Jelöljük a két koncentrikus gömb közös középpontját O-val. A gúlalapok – mivel érintik az O középpontú beírt gömböt, vagyis egyenlő távolságnyira vannak O-tól – egybevágó körlapokat metszenek ki a köréírt gömbből. A gúlalapok köré írt körük sugara tehát egyenlő, és e köröknek középpontjai (K_1, K_2, K_3, K_4) egyben a beírt gömb érintési pontjai. Tehát $OK_1 = OK_2 = OK_3 = OK_4$ szakaszok rendre merőlegesek a gúlalapokra (1. ábra).



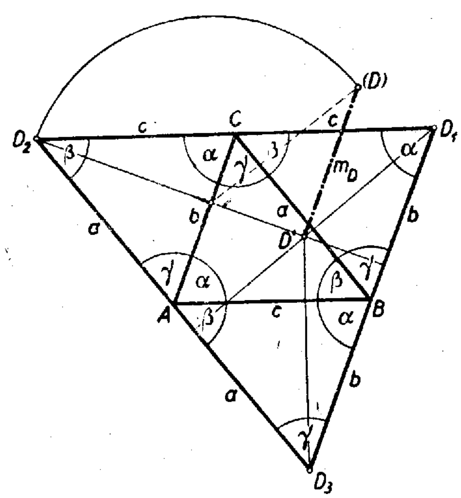
1. ábra

Egyenlő sugarú körökben egyenlő húrokhoz egyenlő kerületi szögek tartoznak, amiből következik, hogy ha az $ABC\triangle$ szögeit α, β, γ-val jelöljük, akkor a D csúcsnál levű élszögek is α, β, γ, és így ezeknek összege 180°. Ami a D csúcsra áll, az teljesen ugyanúgy kimutatható bármely csúcsra. Ebből következik, hogy mind a négy háromszögben a szögek: α, β, γ. Mivel a körülírt kör sugara – mint láttuk – mind a négy háromszögben egyenlő, azért a négy háromszög egybevágó.

Három élszög csak úgy alkothat triédert, ha a legnagyobb élszög is kisebb a másik kettő összegénél. Jelen esetben a 3 élszög összege 180°, tehát a legnagyobb élszög szükségképpen kisebb a derékszögnél, vagyis a négy egybevágó háromszög szükségképpen hegyesszögű.

Ezek szerint, ha a D csúcspontban összefutó 3 gúlalapot az ABC alaplap oldalai körül az alaplap síkjába forgatjuk, akkor a gúlának a 2. ábrában feltüntetett hálózatát nyerjük. (E hálózatból az is világosan leolvasható, hogy a gúla kitérő élei egyenlők.)

Még meg kell mutatnunk, hogy az eddig megállapított *szükséges* feltételek *elégségesek* is, vagyis ha egy tetszőleges ABC hegyesszögű háromszög csúcspontjain át párhuzamosakat húzunk a szemközti oldalakkal, az így nyert $D_1D_2D_3$ háromszögben fekvő négy egybevágó háromszög (2. ábra) tényleg egy háromoldalú gúla hálózata és az így nyert gúla eleget tesz a kiszabott feltételeknek.



2. ábra

Ha az $ABC\triangle$ a és b oldalai körül felhajtjuk a D_1 ill. D_2 csúcspontú gúlalapokat, amíg D_1 és D_2 egy térbeli D pontban egybeesik (ez elérhető, mivel $CD_1 = CD_2$), akkor nyilván a D gúlacsúcspont merőleges vetülete az ABC alapsíkon D' nem egyéb, mint a $D_1D_2D_3\triangle$ magasságpontja. Az így nyert $DAB\triangle \simeq D_3AB\triangle$, és ha az utóbbit felhajtjuk $AB = c$ körül, a D_3 pont is egybeesik a D ponttal, mivel a harmadik magasságvonal szükségképpen átmegy a magassági ponton. (Az ábrán még megszerkesztettük a gúla $D'(D)$ magasságát is.)

A megszerkesztett gúla 4 oldalháromszöge köré egyenlő sugarú körök írhatók. Ezeknek, 3–3 pontja a tetraéder köré írt gömbön van, tehát a négy kör teljes egészében is. De egy gömbön levő egyenlő sugarú körök középpontjai egyenlő távolságra vannak a gömb középpontjától és éppen a gömb középpontjából a körök síkjára bocsátott merőlegesek talppontjai. Tehát a körért gömb középpontja egyszersmind a határlapokat érintő, beírt gömb középpontja is.