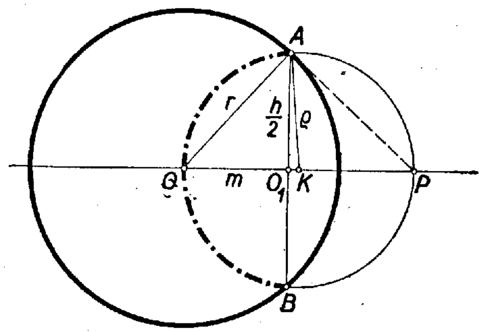
Legyen a változó gömb sugara $KO = \varrho$. A két gömb KO centrális egyenesén átfektetett minden sík a két gömbből egy-egy főkört metsz ki, melyeknek közös húrja legyen $AB = h$ (lásd ábrát).



E két főkörnek a KO tengely körüli forgásából keletkezik a két gömb, és az A (ill. B) pont forgásából pedig a két gömb közös (áthatási) görbéje: az O_1 középpontú, $\frac{h}{2}$ sugarú kör. A változó K középpontú és ϱ sugarú gömbnek az adott szilárd gömbbe eső része, tehát e kör által határolt gömbsüveg, melynek magassága $O_1O = m$ és felszíne legyen F. Ha a változó gömbben az O pontnak átellenes pontját P-vel jelöljük, akkor a Thales-tétel értelmében $OAP\triangle$-ben az $A\sphericalangle$ derékszög.

Ismert tétel alapján

$$OA^2 = OP \cdot OO_1, \quad \text{vagyis} \quad r^2 = 2\varrho \cdot m,$$

amiből

$$m = \frac{r^2}{2\varrho},$$

és így a gömbsüveg ismert felszínképletét felhasználva

$$F = 2\varrho\pi \cdot m = 2\varrho\pi \cdot \frac{r^2}{2\varrho} = r^2\pi.$$

Látjuk tehát, hogy a szilárd r sugarú gömbbe eső F területrész egy ϱ-tól, tehát a K pont helyzetétől, független állandó.

Határesetek: *a)* Ha $\varrho = \frac{r}{2}$, akkor a változó gömb, belülről érintve az adott szilárd gömböt, teljesen annak belsejébe esik. Tehát a kérdéses felület ez esetben

$$F = 4\varrho^2\pi = 4\left(\frac{r}{2}\right)^2\pi = r^2\pi.$$

b) Ha ϱ minden határon túl megnő, akkor a változó sugarú gömb egy, az O ponton átmenő és az OK irányra merőleges síkká fajul, a közös rész pedig a sík által kimetszett r sugarú főkörmetszet, amelynek területe szintén $r^2\pi$.

B. Nagy Kornélia (Tiszaföldvár, Hajnóczy g. IV. o. t.)