I. megoldás: Jelöljük a keresett kétjegyű számokat x és y-nal. Akkor a feladat szerint

$$(x+y)^2 = 100x + y = 99x + x + y,$$

vagyis, ha $x+y$ helyébe z-t írunk,

$$99x = z^2 - z = z(z-1) \tag{1}$$

ahol, mivel z^2 négyjegyű

$$32 \leq z \leq 99,$$

és a feltétel szerint

$$10 \leq x \leq 99.$$

(1)-ből

$$x = \frac{z(z-1)}{99}.$$

Mivel z és $z-1$ szomszédos egész számok, nem lehet mindkettő 3-mal osztható, a $z = 99$ feltevés pedig arra vezet, hogy $x = 98$ és $y = 1$, amely utóbbi szám nem kétjegyű, azért x csak úgy lehet feladatunknak megfelelő kétjegyű egész szám, ha z és $z-1$ közül az egyik 9-cel, a másik 11-gyel osztható. (Megjegyezzük, hogy ha első jegynek 0-t is megengedünk, akkor $x = 98$, $y = 01$ is megoldása a feladatnak.) Tekintsük először a $z = 9u$ és $z - 1 = 11v$ esetet, vagyis

$$9u = 11v + 1 \tag{2}$$

ahol, mint láttuk

$$31 < 9u < 99 \qquad \text{és} \qquad 30 < 11v < 98.$$

Könnyű a (2) alatti határozatlan egyenletnek egy megoldását megtalálni: $u = 5$, $v = 4$ pl. egy megoldás, akkor mint tudjuk (lásd Surányi: »Elsőfokú egyenletek egész megoldásai c.« cikkének 14. pontját az 1953. novemberi 3–4. sz. 72. oldalán).

$$u = 5 + 11t \qquad \text{és} \qquad v = 4 + 9t$$

az összes megoldások paraméteres alakja.

Tehát $\qquad z = 9u = 99t + 45$, ahol

$$31 < 99t + 45 < 99.$$

Ebből

$$-\frac{14}{99} < t < \frac{54}{99},$$

vagyis

$$t = 0, \quad z = 9u = 45, \quad z - 1 = 11v = 44,$$

tehát

$$x = \frac{45 \cdot 44}{9 \cdot 11} = 5 \cdot 4 = 20, \quad \text{és} \quad y = z - x = 45 - 20 = 25.$$

Tényleg $(20+25)^2 = 45^2 = 2025$.

A $z = 11u$ és $z - 1 = 9v$ esetet tekintve

$$11u - 9v = 1,$$

ahonnan

$$u = 9w - 4, \qquad v = 11w - 5,$$

és így

$$11u = 99w - 44, \qquad 9v = 99w - 45.$$

$$31 < 99w - 44 < 99 \,\text{miatt}$$

$$w = 1 \quad z = 99 - 44 = 55, \quad z - 1 = 54.$$

$$x = \frac{z(z-1)}{99} = \frac{55 \cdot 54}{11 \cdot 9} = 5 \cdot 6 = 30, \quad v = z - x = 55 - 30 = 25.$$

Tényleg $(30+25)^2 = 55^2 = 3025$.

Az itt megadott megoldásokon kívül, mint láttuk, más megoldás nem lehet.

Edelényi Miklós (Bp. II., Rákóczi g. III. o. t.)

II. megoldás: A jelöléseket megtartva

$$(x+y)^2 = 100x + y = 100x + 100y - 99y = 100(x+y) - 99y,$$

vagyis

$$z^2 = 100z - 99y,$$

amiből

$$y = \frac{z(100-z)}{99}.$$

Mivel $z = 99$ ismét arra vezetne, hogy $y = 1$, ami ellentmond annak, hogy y kétjegyű, és $z = 33$ eseten y nem egész, azért vagy z vagy $100 - z$-nek oszthatónak kell lennie 11-gyel és ugyanakkor a másik tényezőnek 9-cel. Ez csak akkor következik be, amint erről 8 kísérlettel: $88, 77, \ldots, 11$ meggyőződhetünk, ha

$$z_1 = 55 \quad \text{és} \quad 100 - z_1 = 45,$$

ill.

$$100 - z_2 = 55 \qquad \text{és} \qquad z_2 = 45.$$

Mindkét esetben

$$y_{1,2} = \frac{45 \cdot 55}{9 \cdot 11} = 5 \cdot 5 = 25,$$

és így

$$x_1 = z_1 - y = 55 - 25 = 30, \qquad\qquad x_2 = z_2 - y = 45 - 25 = 20.$$

Eördögh László (Bp., VIII., Apáczai Csere János g. IV. o. t.)